

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 15

TEOREMA (DI CAUCHY)

Siano f e g funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) . Se $\forall x \in (a, b)$ $g'(x) \neq 0$ allora

$$\exists c \in (a, b) \text{ tale che } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

OSSERVAZIONE Se $g(x) = x$ il teorema di Cauchy coincide con il teorema di Lagrange.

TEOREMA (DI DE L'HÔPITAL-JOHANN BERNOULLI)

Siano f e g funzioni derivabili in $(x_0, x_0 + r)$ con $r > 0$ tali che:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0 \quad \text{oppure} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \pm \infty;$$

$$2) \forall x \in (x_0, x_0 + r) \quad g'(x) \neq 0;$$

$$3) \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\text{Allora } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

$$\text{dim. Caso } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0.$$

Si estendono le funzioni f e g ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Così le funzioni estese f e g sono continue in $[x_0, x_0 + r)$.

Sia $\{x_m\}_m$ una successione in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ tale che $x_m \rightarrow x_0^+$. Allora $\forall m \in \mathbb{N}^+$ per il teorema di Cauchy applicato in $[x_0, x_m]$ $\exists c_m \in (x_0, x_m)$

tale che

$$\frac{f(x_m)}{g(x_m)} = \frac{f(x_m) - \overset{=0}{f(x_0)}}{g(x_m) - \underset{=0}{g(x_0)}} = \frac{f'(c_m)}{g'(c_m)}$$

Siccome $x_0 < c_m < x_m$, per doppio confronto, $c_m \rightarrow x_0^+$ e

$$\frac{f(x_m)}{g(x_m)} = \frac{f'(c_m)}{g'(c_m)} \xrightarrow{3)} L.$$

Infine, per il teorema ponte,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

□

OSSERVAZIONE

Il teorema vale anche sostituendo x_0^+ con x_0^- oppure con $\pm\infty$.

ESEMPI

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{3 \cdot x^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x) - x + 1}{1 - \cos(x-1)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -\frac{x-1}{x}}{\sin(x-1)} = -1$$

$$\text{alternativa: } \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\cos(x-1)} = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin^2(\pi x)}{4\sqrt{x} - x - 4} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x) \cdot \pi}{2x^{-1/2} - 1}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\pi^2(\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x))}{-x^{-3/2}} = -16\pi^2$$

alternativa: per $x \rightarrow 4$

$$\frac{\sin^2(\pi x)}{4\sqrt{x} - x - 4} = -\left(\frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x} - 2}\right)^2 \rightarrow -(4\pi)^2 = -16\pi^2$$

dove $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x} - 2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cos(\pi x) \cdot \pi}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = 4\pi$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \log(x) &= 0 \cdot -\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{1/x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2\operatorname{arctg}(x) - \pi e^{\frac{1}{x}}) &= +\infty \cdot 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\operatorname{arctg}(x) - \pi e^{\frac{1}{x}}}{1/x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2} - \pi e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2x^2}{1+x^2} - \pi e^{\frac{1}{x}}\right) = -2 - \pi \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

Prima di applicare il teorema di de L'Hôpital è necessario verificare che le ipotesi siano soddisfatte:

- $+\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x} \stackrel{H}{\neq} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(x)}{1} = 0$
 $\frac{1}{0^+}$
- $\frac{3}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin(x)}{2x + \cos(x)} \stackrel{H}{\neq} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \cos(x)}{2 - \sin(x)}$ Non esiste!
 $\frac{3 + \cos(2\pi m)}{2 - \sin(2\pi m)} = 2 \rightarrow 2 \neq 3 \leftarrow 3 = \frac{3 + \cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi m)}{2 - \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi m)}$

OSSERVAZIONE

Prima di introdurre formalmente le nozioni di polinomio di Taylor e del simbolo $O(x^m)$ detto "o-piccolo" di x^m , facciamo qualche considerazione preliminare.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \underbrace{O(1)}_{\text{infinitesimo per } x \rightarrow 0}$
 $\Leftrightarrow e^x - 1 = x(1 + O(1)) \Leftrightarrow e^x = 1 + x + \underbrace{x \cdot O(1)}_{\substack{\text{infinitesimo} \\ \text{di ordine superiore a } x}} = O(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + O(1) \Leftrightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underbrace{x^2 \cdot O(1)}_{= O(x^2)}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^3)$$

In generale, per ogni intero $n \geq 0$,

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}_{\text{polinomio}} + \underbrace{O(x^{n+1})}_{\text{infinitesimo di ordine superiore a } n}$$

POLINOMIO DI TAYLOR

Sia f una funzione derivabile n volte in x_0 .
Il POLINOMIO DI TAYLOR di f di ordine n e centro x_0 è

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad \leftarrow \text{DERIVATA K-SIMA}$$

ESEMPI

$$\bullet f(x) = e^x, \quad x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = e^{x_0}$$

Così il polinomio di Taylor T_{n, x_0} è

$$T_n(x) = e^{x_0} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (x - x_0)^k$$

Nel caso particolare $x_0 = 0$, $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

- $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$, T_m ?

Calcolo delle derivate successive:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \log(1+x) & \xrightarrow{D} & (1+x)^{-1} & \xrightarrow{D} & -(1+x)^{-2} & \xrightarrow{D} & 2(1+x)^{-3} \\
 \downarrow x=0 & & \downarrow x=0 & & \downarrow x=0 & & \downarrow x=0 \\
 0 & & 1 & & -1 & & 2 \\
 \\
 & \xrightarrow{D} & -2 \cdot 3 (1+x)^{-4} & \xrightarrow{D} & \dots & \xrightarrow{D} & (-1)^{m-1} (m-1)! (1+x)^{-m} \\
 & & \downarrow x=0 & & & & \downarrow x=0 \\
 & & -6 & & & & (-1)^{m-1} (m-1)!
 \end{array}$$

Così il polinomio di Taylor T_m in $x_0 = 0$ è

$$\begin{aligned}
 T_m(x) &= 0 + 1 \cdot x - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 - \frac{6}{4!} x^4 + \dots + \frac{(-1)^{m-1} (m-1)!}{m!} x^m \\
 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{m} x^m \\
 &= \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k
 \end{aligned}$$