

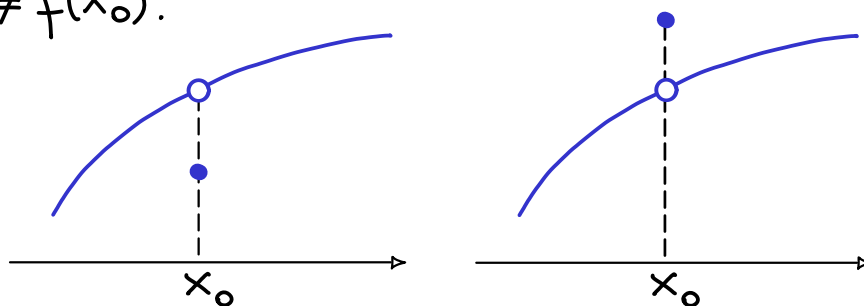
ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 14

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$. Supponiamo che

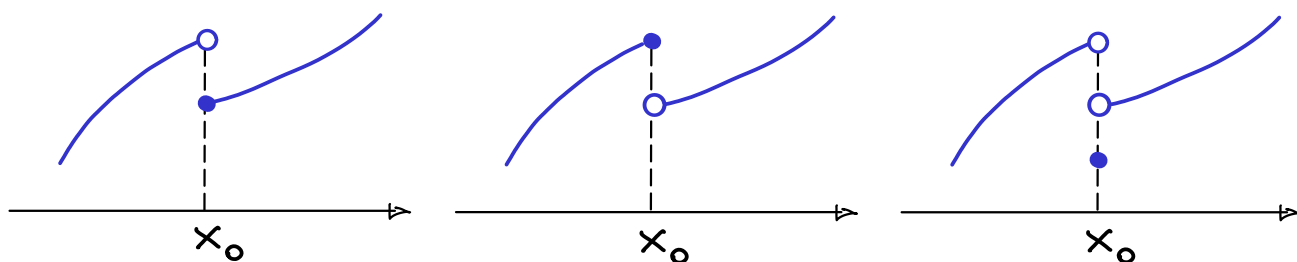
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+ \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^- \in \mathbb{R}.$$

1) x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE se $L^+ = L^- \neq f(x_0)$.



Esempio: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$ in $x_0=0$.

2) x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SALTO se $L^+ \neq L^-$.



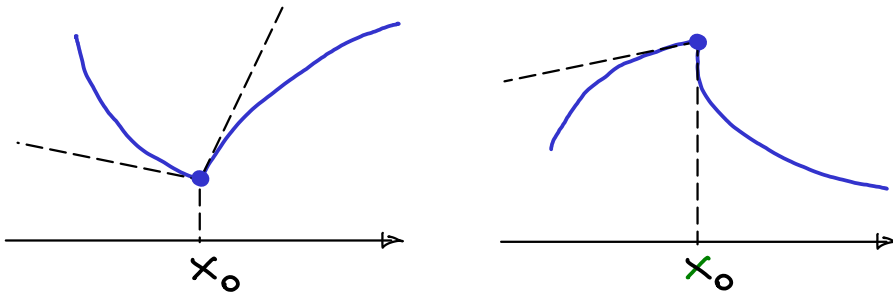
Esempio: $f(x) = \lfloor x \rfloor$ in $x_0 \in \mathbb{Z}$.

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Supponiamo che f sia continua in x_0 e che

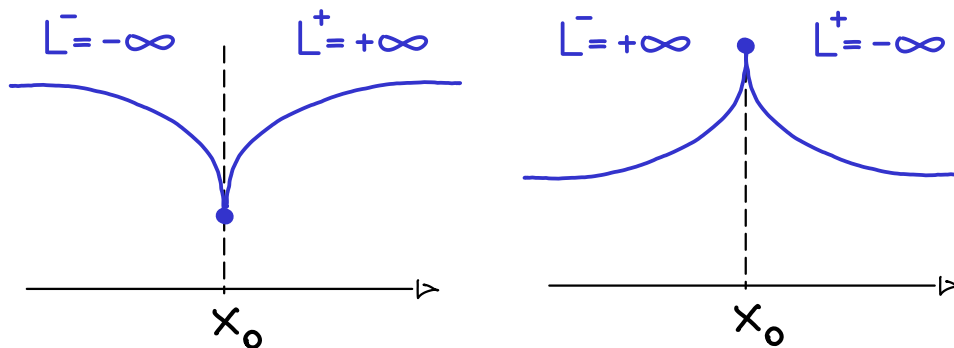
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = L^+ \in \overline{\mathbb{R}} \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = L^- \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) Se $L^+ \neq L^-$ e almeno uno è finito allora x_0 si dice PUNTO ANGOLOSO



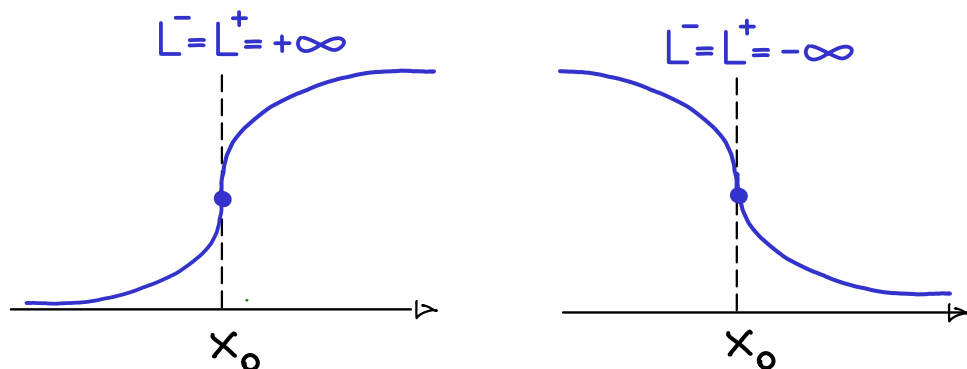
Esempio: $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

2) Se $L^+ \neq L^-$ e entrambi sono non finiti allora x_0 si dice PUNTO DI CUSPIDE



Esempio: $f(x) = \sqrt{|x|}$ in $x_0 = 0$.

3) Se $L^+ = L^-$ e entrambi sono non finiti allora x_0 si dice PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE



Esempio: $f(x) = \sqrt{x^3}$ in $x_0 = 0$.

STUDIO DEL GRAFICO

Per tracciare il grafico di una funzione è utile fare i seguenti passi.

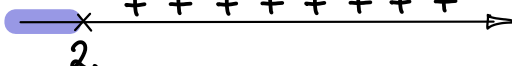
- 1) Determinare il dominio.
- 2) Studiare la continuità, le simmetrie e il segno.
- 3) Valutare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
- 4) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata prima, studiare la crescita/decrescenza e determinare i punti di massimo/minimo relativo/assoluto.
- 5) Calcolare la derivata seconda, studiare la convessità/concavità e determinare i punti di flesso.

ESEMPI

- $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

Domínio: $x > 2 \Rightarrow D = (2, +\infty)$

f è continua in D e il suo segno è

f 

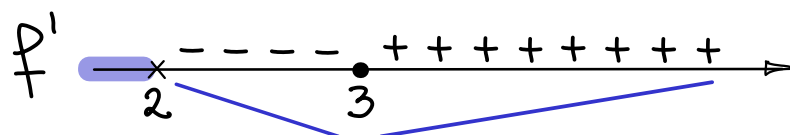
Limiti agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x=2 \text{ è un asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \text{non c'è asintoto per } x \rightarrow +\infty$$

Derivata prima: f è derivabile in D e

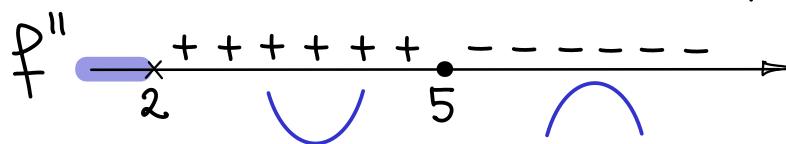
$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x-1) \cdot (x-2)^{-\frac{1}{2}})' = (x-2)^{-\frac{1}{2}} + (x-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{3}{2}}(2(x-2) - (x-1)) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{3}{2}}(x-3) \end{aligned}$$



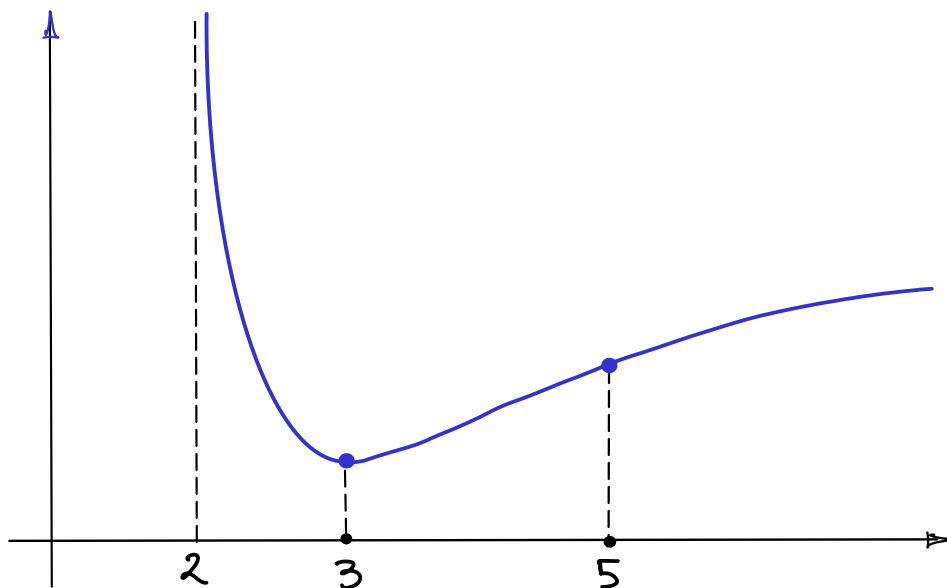
f è decrescente in $(2, 3]$ e crescente in $[3, +\infty)$
 $x=3$ è un punto di minimo assoluto e $f(3)=2$ è il valore minimo.

Derivata seconda: per $x \in D$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{3}{4}(x-2)^{-\frac{5}{2}}(x-3) + \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{5}{2}}(3(x-3) - 2(x-2)) = -\frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{5}{2}}(x-5) \end{aligned}$$



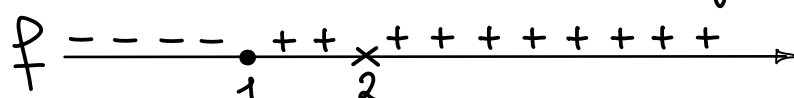
f è convessa in $(2, 5]$ e concava in $[5, +\infty)$
 $x=5$ è un punto di flesso.



• $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{|x-2|}}$ Qual è il grafico di $|f(x)|$?

Domínio: $x \neq 2 \Rightarrow D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

f è continua in D e il suo segno è



Notiamo che per $x > 2$, f coincide con la funzione precedente. Studiamo solo il caso $x < 2$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2-x}}$$

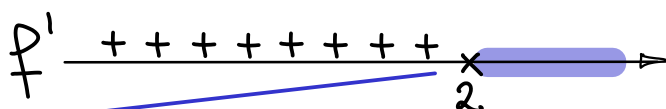
Limiti agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x=2 \text{ è un asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{non c'è} \\ \text{asintoto} \\ \text{per } x \rightarrow -\infty \end{array}$$

Derivata prima: per $x < 2$

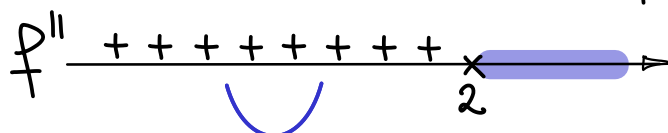
$$f'(x) = (2-x)^{-\frac{1}{2}} + (x-1) \cdot \left(+\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}}(3-x)$$



f è crescente in $(-\infty, 2)$.

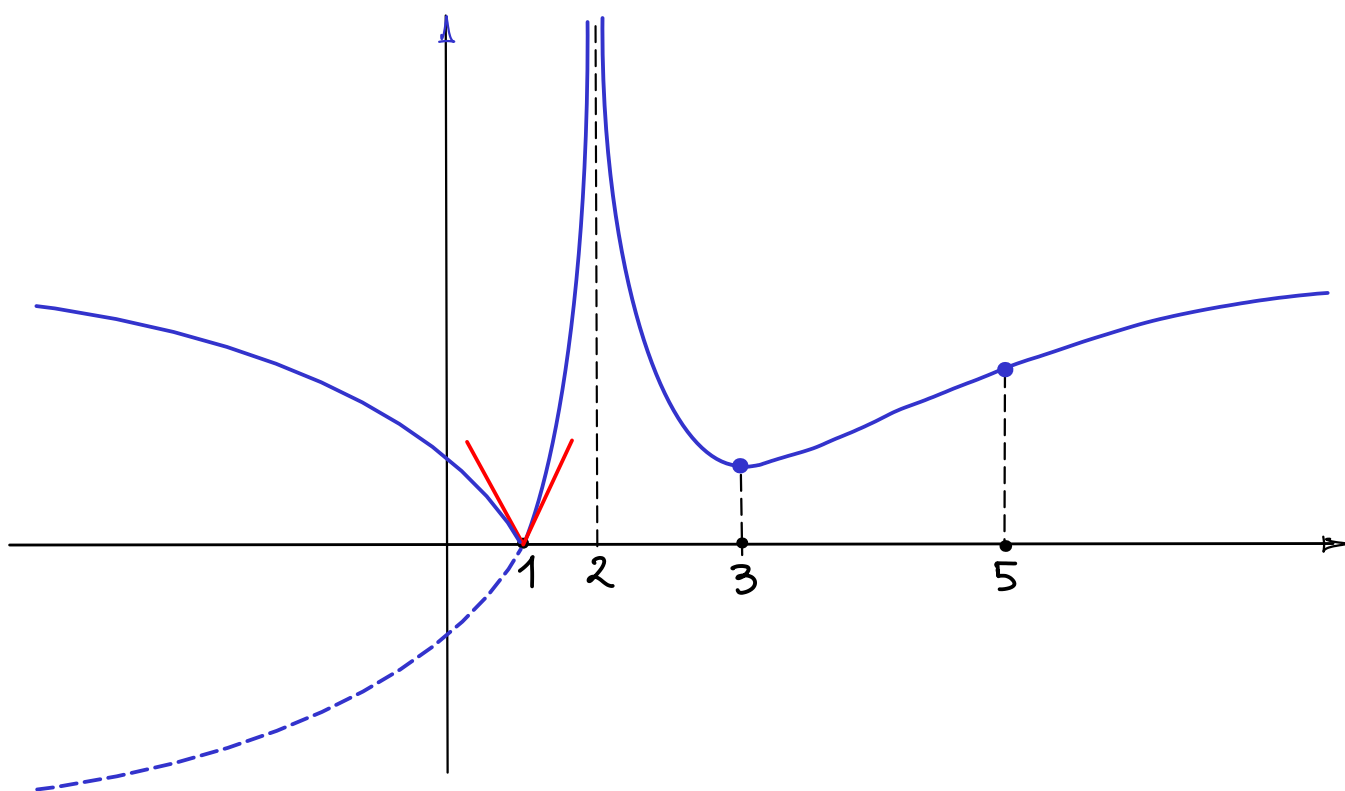
Derivata seconda: per $x < 2$

$$f''(x) = +\frac{3}{4}(2-x)^{-\frac{5}{2}}(3-x) - \frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}(2-x)^{-\frac{5}{2}}(5-x)$$



f'' è convessa in $(-\infty, 2)$.

Grafico di $|f(x)|$:



Rispetto a $|f(x)|$, $x=1$ è un punto di minimo assoluto e anche un punto angoloso:

$$f'(1) = \left(\frac{1}{2}(2-1)^{-\frac{3}{2}}(3-1) \right) = 1$$

e dunque se $g(x) = |f(x)|$,

$$g'_+(1) = f'(1) = 1 \quad \text{e} \quad g'_-(1) = -f'(1) = -1.$$