

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 12

TEOREMA (DI LAGRANGE O DEL VALOR MEDIO)

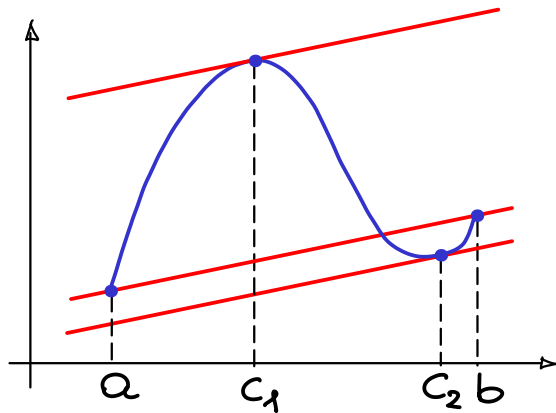
Se f è una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) allora $\exists c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

rette parallele

Coefficiente angolare della retta secante passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Coefficiente angolare della retta tangente in $(c, f(c))$



dim. Definiamo la funzione ausiliaria

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right) \quad (*)$$

che per ipotesi è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Inoltre

$$\left. \begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) = 0, \\ h(b) &= f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) + f(a) \right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(a) = h(b)$$

Per il teo. di Weierstrass applicato a h in $[a, b]$
 $\exists x_{\min}$ e $\exists x_{\max}$ in $[a, b]$ punti di minimo e di massimo assoluto di h .

Ci sono due casi possibili.

1) ENTRAMBI i punti $x_{\min}$ e $x_{\max}$ sono in $\{a, b\}$.
In tal caso $h(x_{\min}) = h(x_{\max})$ (perché $h(a) = h(b)$)
e dunque h è costante in $[a, b]$. Allora
$$\forall x \in (a, b) \quad h'(x) = 0.$$

2) ALMENO UNO dei punti $x_{\min}$ e $x_{\max}$ è in (a, b) .
Per il teo. di Fermat applicato a h in quel punto si ha che

$$h'(x_{\min}) = 0 \text{ oppure } h'(x_{\max}) = 0.$$

Quindi sia nel caso 1) che nel caso 2)

$$\exists c \in (a, b) \text{ tale che } h'(c) = 0.$$

Infine

$$0 = h'(c) \stackrel{(*)}{=} f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

□

OSSERVAZIONE

Nel caso particolare in cui $f(b) = f(a)$,
il teorema del valor medio si dice anche

TEOREMA DI ROLLE:

Se f è una funzione continua in $[a, b]$ e
derivabile in (a, b) allora $\exists c \in (a, b)$ tale che
$$f'(c) = 0.$$

TEOREMA (CRITERIO DI MONOTONIA)

Sia f derivabile in un intervallo I .

Allora

1) f è crescente in $I \iff \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$.

2) f è decrescente in $I \iff \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$.

dim. Caso 1) (il caso 2) è simile).

($\Rightarrow$) Se $x \in I$ allora il segno del rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \begin{cases} \left(\frac{\geq 0}{+} \right)^{\geq 0} & \text{se } h > 0 \\ \left(\frac{\leq 0}{-} \right)^{\leq 0} & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

Quindi in ogni caso il rapporto è ≥ 0 e per la permanenza del segno

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

($\Leftarrow$) Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$.

Dobbiamo verificare che $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Per il teo. del valor medio applicato a f in $[x_1, x_2]$, $\exists c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)_{>0}} = f'(c) \geq 0 \quad \leftarrow \text{per ipotesi}$$

e quindi necessariamente $f(x_2) \geq f(x_1)$.

□

OSSERVAZIONI Sia I un intervallo.

1) Se $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$ allora f è costante in I .

2) Se $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$ allora f è strettamente crescente in I .

Non vale l'implicazione opposta: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ ma $f'(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$.

3) Se $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$ allora f è strettamente decrescente in I .

ESEMPI

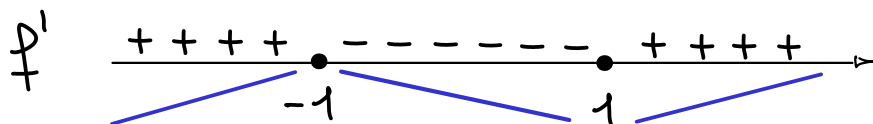
- $f(x) = x^3 - 3x + 1$

f è continua in $D = \mathbb{R}$.

f non ha punti di max/min assoluto perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 1) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1) = -\infty$$

f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$



f è crescente in $(-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty)$

f è decrescente in $[-1, 1]$

$x = -1$ è un punto di max. relativo in $\mathbb{R}$ e $f(-1) = 3$.

$x = 1$ è un punto di min. relativo in $\mathbb{R}$ e $f(1) = -1$.

- $f(x) = x^x = e^{x \log(x)}$

f è continua e positiva in $D = (0, +\infty)$

f non ha punti di max. assoluto perché

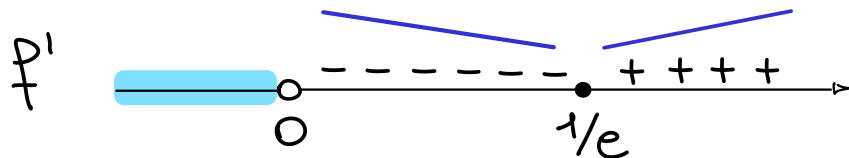
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty.$$

Si noti che 0 è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log(x)} = e^0 = 1$$

f è derivabile in $(0, +\infty)$ e per $x > 0$

$$f(x) = e^{x \log(x)} (\log(x) + x \cdot \frac{1}{x}) = \underbrace{x^x}_{>0} (\log(x) + 1)$$



f è crescente in $[1/e, +\infty)$.

f è decrescente in $(0, 1/e]$.

$x = 1/e$ è un punto di min. assoluto in $(0, +\infty)$.

Il valore minimo è $f(1/e) = e^{-1/e} \in (0, 1)$.

- $f(x) = \arctg(x) + \arctg(\frac{1}{x})$

f è continua in $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctg(x) + \arctg(\frac{1}{x})) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\arctg(x) + \arctg(\frac{1}{x})) = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctg(x) + \arctg(\frac{1}{x})) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\arctg(x) + \arctg(\frac{1}{x})) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e per $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

e quindi f è costante su ogni intervallo.

Visti i limiti calcolati agli estremi la costante è $\frac{\pi}{2}$ in $(0, +\infty)$ ed è $-\frac{\pi}{2}$ in $(-\infty, 0)$ ossia

$$\arctg(x) + \arctg(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

