

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 11

MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE

Siano $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq D$ e $x_0 \in A$.

x_0 si dice PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO di f in A

se $\forall x \in A \quad f(x) \leq f(x_0)$

ossia $\max\{f(x) : x \in A\} = f(x_0)$.

x_0 si dice PUNTO DI MASSIMO RELATIVO di f in A

se $\exists r > 0 : \forall x \in A \cap I(x_0, r) \quad f(x) \leq f(x_0)$

x_0 si dice PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO di f in A

se $\forall x \in A \quad f(x) \geq f(x_0)$

ossia $\min\{f(x) : x \in A\} = f(x_0)$.

x_0 si dice PUNTO DI MINIMO RELATIVO di f in A

se $\exists r > 0 : \forall x \in A \cap I(x_0, r) \quad f(x) \geq f(x_0)$.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente funzione

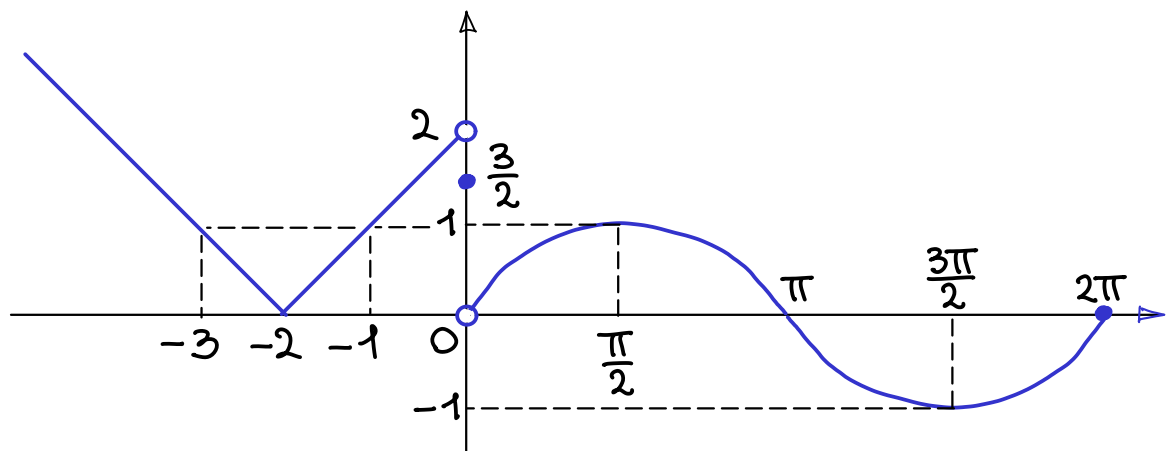
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \in (0, 2\pi] \\ \frac{3}{2} & \text{se } x = 0 \\ |x+2| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f è definita in $D = (-\infty, 2\pi]$ e continua in $D \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x+2| = 2$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



Se $A=D=(-\infty, 2\pi]$

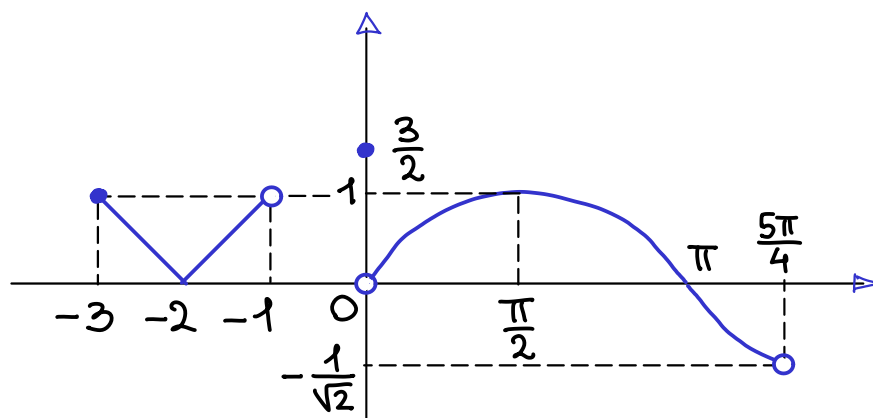
i punti di max. relativo di f in A sono $\frac{\pi}{2}$ e 2π ;
in A non ci sono punti di max. assoluto di f
perché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty ;$$

i punti di min. relativo di f in A sono -2 e $\frac{3\pi}{2}$;
in A c'è un punto di min. assoluto di f ed è $\frac{3\pi}{2}$
perché

$$\forall x \in (-\infty, 2\pi] \quad f(x) \geq f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{VALORE MINIMO } -1$$

Se $A = [-3, -1) \cup [0, \frac{5\pi}{4})$ allora



punti di max. relativo di f in A : $-3, 0, \frac{\pi}{2}$;

0 è un punto di max. assoluto di f in A ;

VALORE MASSIMO $\frac{3}{2}$

punti di min. relativo di f in A : -2 ;

non ci sono punti di min. assoluto di f in A .

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$ allora x_0 si dice PUNTO STAZIONARIO.

TEOREMA (DI FERMAT)

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di max. o min. relativo di f in (a, b) .

Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$ ossia x_0 è un punto stazionario.

dim. Caso x_0 punto di max. relativo.

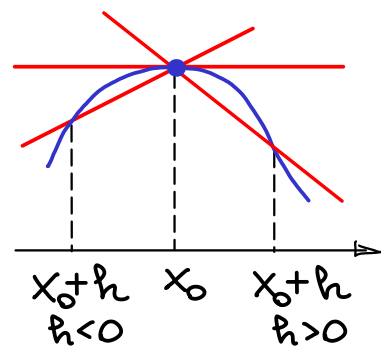
Per definizione di punto di max. relativo

$\exists r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (a, b)$ x_0 è INTERNO ad (a, b)

e $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad f(x) \leq f(x_0)$. x_0 è un punto di max. relativo

Allora il segno del rapporto incrementale in x_0 è

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \begin{cases} \left(\frac{\leq 0}{+} \right) \leq 0 & \text{se } 0 < h < r \\ \left(\frac{\leq 0}{-} \right) \geq 0 & \text{se } -r < h < 0 \end{cases}$$



Quindi dato che f è derivabile in x_0 , per la permanenza del segno

$$\left. \begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \\ f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \square$$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE (2ª PARTE)

TEOREMA (DI BOLZANO-WEIERSTRASS)

Se $\{x_n\}_n$ è una successione limitata allora $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ convergente.

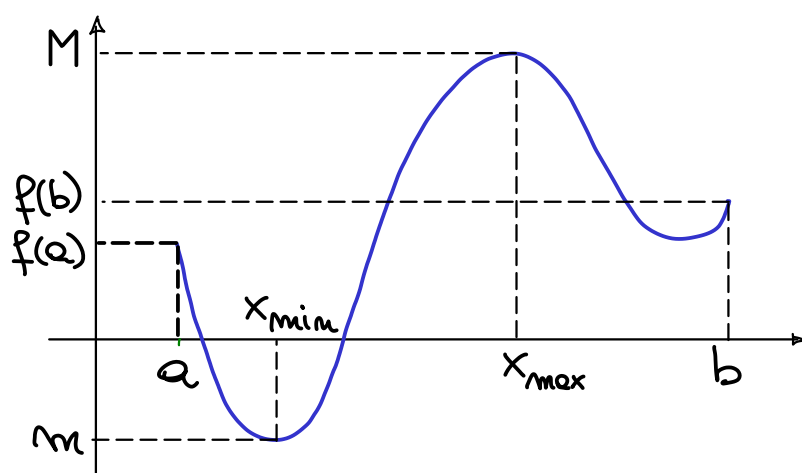
TEOREMA (DI WEIERSTRASS)

INSIEME COMPATTO

Se f è una funzione continua in $[a, b]$ allora $\exists x_{\min} \in [a, b]$ e $\exists x_{\max} \in [a, b]$ tali che

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

ossia $x_{\min}$ è un punto di minimo assoluto e $x_{\max}$ è un punto di massimo assoluto di f in $[a, b]$.



OSSERVAZIONE Se f è continua in $[a, b]$ allora per il teo. dei valori intermedi e il teo. di Weierstrass f assume TUTTI i valori tra il valore massimo $M = f(x_{\max})$ e il valore minimo $m = f(x_{\min})$: $f([a, b]) = [m, M]$.

dim. Esistenza di $x_{\max}$ (per $x_{\min}$ è simile).

Sia $M = \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Per le proprietà dell'estremo superiore:

1) Se $M = +\infty$ allora $\forall m \in \mathbb{N}^+ \exists x_m \in [a, b]$ tale che $f(x_m) > m$.

2) Se $M \in \mathbb{R}$ allora $\forall m \in \mathbb{N}^+ \exists x_m \in [a, b]$ tale che $M - \frac{1}{m} < f(x_m) \leq M$.

Sia in 1) che in 2) si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M \quad (*)$$

Siccome $\{x_n\}_n \subseteq [a, b]$, $\{x_n\}_n$ è limitata e per il teo. di Bolzano-Weierstrass $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ convergente.

Chiamiamo $x_{\max}$ il suo limite:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_{\max}.$$

Dato che $a \leq x_{n_k} \leq b$ anche $x_{\max} \in [a, b]$.

Per ipotesi, f è continuo in $[a, b]$.

Così, per la continuità di f in $x_{\max} \in [a, b]$.

$$M \stackrel{(*)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \stackrel{\substack{\text{continuità} \\ \text{limite} \\ \text{sottosuccessione}}}{=} f(x_{\max})$$

Si conclude che

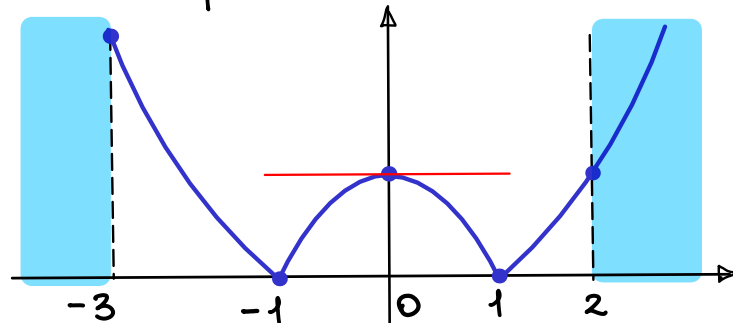
$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq M = f(x_{\max}).$$

□

OSSERVAZIONE Se f è continua in $[a,b]$ allora per individuare i punti di max/min assoluti in $[a,b]$ è necessario confrontare i valori di f nei punti stazionari interni (per il teo. di Fermat), negli estremi a e b e nei punti dove f non è derivabile (dove il teo. di Fermat non è applicabile).

ESEMPIO

Sia la funzione $f(x) = |x^2 - 1|$ in $A = [-3, 2]$.



f è continua in $[-3, 2]$ e $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } |x| > 1 \\ -2x & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$

f non è derivabile in $x = 1$ e $x = -1$ e l'unico punto stazionario è $x = 0 \in (-3, 2)$.

Quindi per individuare i max/min assoluti di f in $[-3, 2]$ basta confrontare i valori

$$f(0) = 1, \quad f(-3) = 8, \quad f(2) = 3, \quad f(1) = f(-1) = 0$$

$\uparrow$ punto stazionario
 $\nwarrow$ estremi di $[-3, 2]$
 $\uparrow$ punti di non derivabilità

Così il punto di max. assoluto è $x = -3$ e i punti di minimo assoluto sono $x = 1$ e $x = -1$.
 $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di max. relativo.