

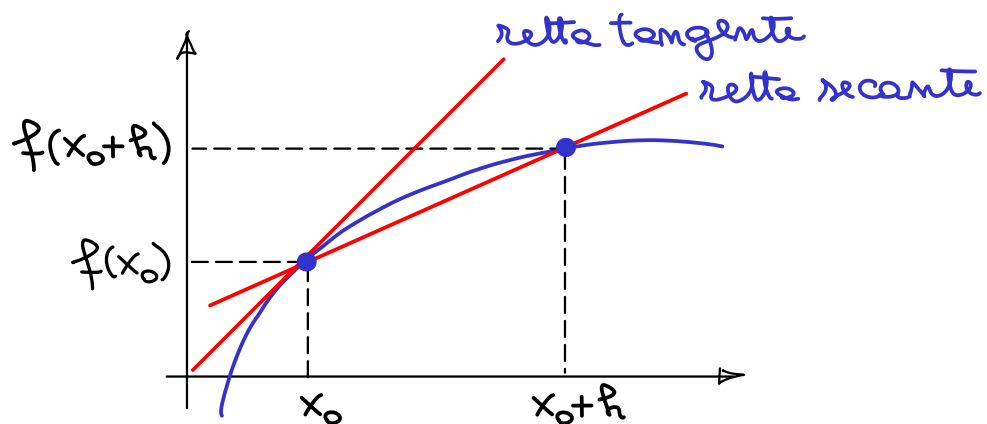
ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 10

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$ un punto di accumulazione di D . f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste il seguente limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Il valore del limite $f'(x_0)$ si dice DERIVATA PRIMA DI f IN x_0 . Interpretazione geometrica:



RAPPORTO INCREMENTALE

$$\text{RETTA SECANTE: } y = \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{RETTA TANGENTE: } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

OSSERVAZIONE

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 :
per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \left(\overset{\rightarrow f'(x_0)}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \right) \cdot \overset{\rightarrow 0}{(x - x_0)} \rightarrow f(x_0)$$

DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

1) $f(x) = mx + q \Rightarrow f'(x) = m$

dim. Se $x \in \mathbb{R}$ allora per $h \rightarrow 0$

$$\frac{m(\cancel{x+h}) + \cancel{q} - (m\cancel{x} + \cancel{q})}{h} = m \rightarrow m$$

□

2) $f(x) = x^b \Rightarrow f'(x) = bx^{b-1}$

dim. Se $x \in \mathbb{D}$ e $x \neq 0$ allora per $h \rightarrow 0$

$$\frac{(x+h)^b - x^b}{h} = x^b \cdot \left(\frac{(1 + \frac{h}{x})^b - 1}{\frac{h}{x}} \right) \cdot \frac{1}{x} \rightarrow bx^{b-1}$$

Se $b > 0$ e $x = 0$ allora per $h \rightarrow 0$

$$\frac{h^b - 0^b}{h} = h^{b-1} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases} \quad \text{NON DERIVABILE}$$

□

Ad esempio:

$$f(x) = x^3 \xrightarrow{b=3} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{b=\frac{1}{2}} \forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{b=-1} \forall x \neq 0 \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

3) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

dim. Se $x \in \mathbb{R}$ allora per $h \rightarrow 0$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) \rightarrow e^x$$

□

$$4) f(x) = \log(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

dim. Se $x > 0$ allora per $h \rightarrow 0$

$$\frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \left(\frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \right) \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{\rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad \square$$

$$5) f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

dim. Se $x \in \mathbb{R}$ allora per $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin(x+h) &= \sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \sin(h) \\ \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \sin(x) \cdot \left(\frac{\cos(h) - 1}{h} \right) + \cos(x) \cdot \left(\frac{\sin(h)}{h} \right) \\ &\xrightarrow{\rightarrow 0} \cos(x) \end{aligned} \quad \square$$

$$6) f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

dim. Se $x \in \mathbb{R}$ allora per $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \cos(x+h) &= \cos(x) \cdot \cos(h) - \sin(x) \sin(h) \\ \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \cos(x) \cdot \left(\frac{\cos(h) - 1}{h} \right) - \sin(x) \cdot \left(\frac{\sin(h)}{h} \right) \\ &\xrightarrow{\rightarrow 0} -\sin(x) \end{aligned} \quad \square$$

$$7) f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ per } x \in (-1, 1)$$

$$8) f(x) = \arccos(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ per } x \in (-1, 1)$$

$$9) f(x) = \arctg(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ per } x \in \mathbb{R}$$

REGOLE DI DERIVAZIONE

Siano f e g funzioni derivabili:

LINEARITA':

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

DERIVATA DEL PRODOTTO:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

DERIVATA DEL QUOZIENTE: se $g(x) \neq 0$ allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE $(g \circ f)(x) = g(f(x))$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

ESEMPI

- $f(x) = 3 \log(x) + 5\sqrt[4]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}}$
- $f(x) = x^2 \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 2x \cos(x) + x^2(-\sin(x))$
- $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2(x) \quad \text{espressione alternativa}$$

- $f(x) = x \cdot \cos(x) \cdot \arcsin(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = (x \cdot \cos(x))' \cdot \arcsin(x) + \frac{x \cdot \cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= (\cos(x) + x(-\sin(x))) \cdot \arcsin(x) + \frac{x \cdot \cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $f(x) = \frac{\log(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \log(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

- $f(x) = a^x = e^{x \log(a)} \Rightarrow f'(x) = e^{x \log(a)} \cdot \log(a)$
 $= a^x \cdot \log(a)$

- $f(x) = \sqrt{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos(x)$

- $f(x) = \arctg(e^{x^2}) \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{1+(e^{x^2})^2}$

- $f(x) = \log(1+x \operatorname{tg}(x))$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{0 + \operatorname{tg}(x) + x(1+\operatorname{tg}^2(x))}{1+x \cdot \operatorname{tg}(x)}$$

- $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow$

$$f'(x) = \exp\left(x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

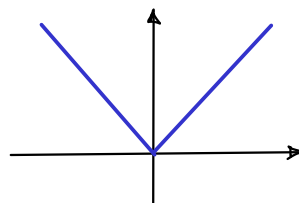
$$= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$$

OSSERVAZIONE

Se $f(x)=|x|$ allora per $x>0$, $f(x)=x$ e $f'(x)=1$ mentre per $x<0$, $f(x)=-x$ e $f'(x)=-1$.

Quindi $|x|$ è derivabile in $x \neq 0$:

$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



In $x=0$, $|x|$ non è derivabile perché

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1 \quad \text{derivata destra in } 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1 \quad \text{derivata sinistra in } 0$$

In generale, se i limiti esistono, si pone

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \quad \text{DERIVATA DESTRA di } f \text{ in } x_0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \quad \text{DERIVATA SINISTRA di } f \text{ in } x_0$$