

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 9

ESEMPI

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\cos(x)} \right)}_{\rightarrow 1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \stackrel{\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)}{=} \left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\rightarrow 1} \right)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \cos(x)} \right)}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y = \operatorname{arcsen}(x) \rightarrow 0}} \frac{y}{\operatorname{sen}(y)} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y = \operatorname{arctg}(x) \rightarrow 0}} \frac{y}{\operatorname{tg}(y)} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen}(x) = \nexists$$

perché $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \rightarrow +\infty \Rightarrow \operatorname{sen}(x_n) = (-1)^n \rightarrow \text{non esiste}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sen}(x) = - \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y = -x \rightarrow +\infty}} \operatorname{sen}(y) = \nexists$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$$

$$\text{Per } x \rightarrow \pm\infty, \quad 0 \leq \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \rightarrow 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x - \pi} \stackrel{y = x - \pi \rightarrow 0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(y)}{y} = -1$$

CONFRONTI TRA INFINITESIMI

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ e supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \pm\infty \end{cases}$$

- 1) nel caso 0 diciamo che per $x \rightarrow x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE a $g(x)$
- 2) nel caso $l \neq 0$ diciamo che per $x \rightarrow x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DELLO STESSO ORDINE di $g(x)$
- 3) nel caso $\pm\infty$ diciamo che per $x \rightarrow x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE a $g(x)$

Se $\alpha > 0$, per $x \rightarrow x_0$, $(x - x_0)^\alpha$ è un infinitesimo di ordine α .

ESEMPI

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 - x^a} = ?$ con $a > 0$ e $a \neq 2$

Se $0 < a < 2$ allora per $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 - x^a} = \frac{x \overset{\rightarrow 0}{(2x^2 - 3x + 4)}}{x^a \overset{\rightarrow 0}{(x^{2-a} - 1)}} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ -4 & \text{se } a = 1 \\ -\infty & \text{se } 1 < a < 2 \end{cases}$$

Se $2 < a$ allora per $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x}{x^2 - x^a} = \frac{\overset{\rightarrow 0}{x} \overset{\rightarrow 0}{(2x^2 - 3x + 4)}}{x^2 (1 - x^{a-2})} \rightarrow +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = 2$$

$$\frac{x - 2x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} \rightarrow \frac{2}{2-1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} \leftarrow \sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \right)}_{\rightarrow -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\cos(x)} \right)}_{\rightarrow 1} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \left(\frac{\log(1 + \underbrace{(\cos(x) - 1)}_{\rightarrow 0})}{\underbrace{(\cos(x) - 1)}_{\rightarrow 0}} \right) \cdot \left(\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \right) \rightarrow 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan(y)} = 1$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \rightarrow 0 \\ x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{\tan(y)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x \right) = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x = x \left(\left(1 + \left(\frac{2x^2 + 1}{x^3} \right) \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$$

$$= \left(\underbrace{x \cdot \frac{2x^2 + 1}{x^3}}_{\rightarrow 2} \right) \cdot \left(\frac{\left(1 + \frac{2x^2 + 1}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{2x^2 + 1}{x^3}} \right) \rightarrow \frac{2}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^a - 1}{t} = a$$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE (1ª PARTE)

TEOREMA (DEGLI ZERI) Se f è una funzione continua in $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

dim. Caso $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Costruiamo ricorsivamente due successioni $\{a_m\}_m, \{b_m\}_m$ nel seguente modo: $a_0 = a, b_0 = b$ e dati $a_0, a_1, \dots, a_m$ e $b_0, b_1, \dots, b_m$ sia

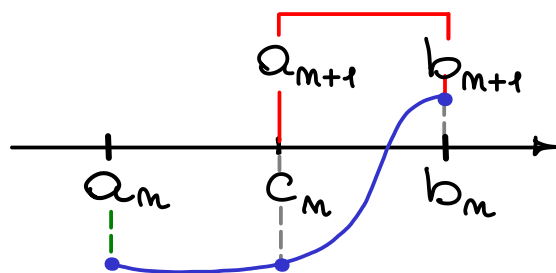
$$c_m = \frac{a_m + b_m}{2} \quad \text{PUNTO MEDIO di } [a_m, b_m]$$

Abbiamo 3 casi possibili (ed esclusivi).

1) Se $f(c_m) = 0$ allora $x_0 = c_m$ e abbiamo finito.

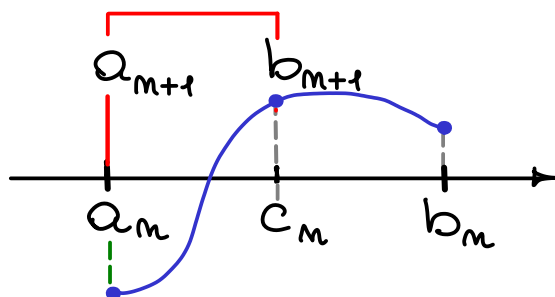
2) Se $f(c_m) < 0$ allora poniamo

$$a_{m+1} = c_m \quad \text{e} \quad b_{m+1} = b_m$$



3) Se $f(c_m) > 0$ allora poniamo

$$a_{m+1} = a_m \quad \text{e} \quad b_{m+1} = c_m$$



Se 1) non si verifica mai, $\{a_m\}_m$ e $\{b_m\}_m$ sono tali che

$$\begin{array}{c} \{a_n\} \text{ \textit{\textless sup. limitata} } \quad \{b_n\} \text{ \textit{\textless decrescente} } \\ \forall m \in \mathbb{N} \quad a_m \leq a_{m+1} < b \quad \text{e} \quad a < b_{m+1} \leq b_m \\ \{a_n\} \text{ \textit{\textless crescente} } \quad \{b_n\} \text{ \textit{\textless inf. limitata} } \end{array}$$

e quindi convergono entrambe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n, n \geq 0\} = A \quad \text{con } a \leq A \leq B \leq b.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \{b_n, n \geq 0\} = B$$

Inoltre al passo n -simo l'intervallo $[a, b]$ è stato diviso a metà n volte e quindi

$$B - A \xleftarrow{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow B = A.$$

Chiamiamo questo valore comune x_0 e verifichiamo che $f(x_0) = 0$.

Dato che f è continua in $x_0 \in [a, b]$,

$$\begin{array}{l} a_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \overbrace{f(a_n) \rightarrow f(x_0)}^{\leq 0} \leq 0 \\ b_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \overbrace{f(b_n) \rightarrow f(x_0)}^{> 0} \geq 0 \end{array} \quad \text{permanenza del segno}$$

Così $0 \leq f(x_0) \leq 0$ ossia $f(x_0) = 0$. □

TEOREMA (DEI VALORI INTERMEDI)

Se f è una funzione continua in $[a, b]$ e y_0 è un valore compreso strettamente tra $f(a)$ e $f(b)$ allora $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = y_0$.

OSSERVAZIONE

Se f è una funzione continua in un intervallo I allora l'insieme immagine $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è ancora un intervallo.

ESEMPIO

Contare il numero di soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni:

1) $2^x = \sin(\pi x)$,

2) $\arcsin(2^x) = \pi x$.

L'equazione 1) ha infinite soluzioni.

Sia $f(x) = 2^x - \sin(\pi x)$. f è continua in $\mathbb{R}$ e

$$\forall m \in \mathbb{N}^+ \quad f(-2m) = 2^{-2m} - 0 > 0$$

$$f(-2m + \frac{1}{2}) = 2^{-2m + \frac{1}{2}} - 1 < 0$$

e per il teorema degli zeri $\exists x_m \in (-2m, -2m + \frac{1}{2})$ tale che $f(x_m) = 0$.

L'equazione 2) non ha soluzioni.

Sia $f(x) = \arcsin(2^x) - \pi x$. f è continua in

$$D = \{x : 2^x \in [-1, 1]\} = (-\infty, 0].$$

Inoltre $\forall x \leq 0$,

$$f(x) = \underbrace{\arcsin(2^x)}_{>0} + \underbrace{(-\pi x)}_{\geq 0} > 0.$$

f non si annulla MAI!