

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 7

ESEMPI

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{n-1}(n+1)! + 2n^{n-2}(n+2)!}{n^{10} \cdot 10^{3n} - n! \cdot n^n} = ?$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \cdot \cancel{n!} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right) + 2 \cdot \left(\frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \right) \right)}{\cancel{n} \cdot \cancel{n!} \cdot \left(\left(\frac{n^{10}}{n^n} \right) \left(\frac{10^{3n}}{n!} \right) - 1 \right)} = -5.$$

$\xrightarrow{-1} \quad \xrightarrow{-1} \quad \xrightarrow{-1} \quad \xrightarrow{-1}$
 $\xrightarrow{-0} \quad \xrightarrow{-0} \quad \xrightarrow{-0} \quad \xrightarrow{-0}$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = ?$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1.$$

$\xrightarrow{-0}$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - n^n}{a^{n \log n}} = ? \quad \text{per } a > 0$$

$$a^{n \log n} = e^{\log(a) \cdot n \log n} = n^{n \log(a)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \left(\frac{n!}{n^n} - 1 \right)}{n^{n \log(a)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{n(1 - \log(a))} \cdot \left(\left(\frac{n!}{n^n} \right) - 1 \right)$$

$\xrightarrow{-0}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a > e & 1 - \log(a) < 0 \\ -1 & \text{se } a = e & 1 - \log(a) = 0 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < e & 1 - \log(a) > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+1})^n} = ?$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\sqrt{n} \log n - \frac{n}{2} \log(n+1)\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\underbrace{(n \log n)}_{\rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\left(\frac{\log(n+1)}{2 \log n} \right)}_{\rightarrow 1/2} \right) \right) = e^{-\infty} = 0.$$

IL NUMERO DI NEPERO e

TEOREMA La successione $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ è convergente e il suo limite è detto NUMERO DI NEPERO e: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

OSSERVAZIONE Si dimostra che $e \notin \mathbb{Q}$ e il suo valore è

$$e = 2.718281828459\dots$$

dim. Verifichiamo la convergenza dimostrando che 1) la successione è strettamente crescente e 2) la successione è superiormente limitata e dunque il limite esiste e vale

$$\sup \left(\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\} \right) \in \mathbb{R}.$$

1) Stretta crescenza: $\forall m \geq 1 \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} &= \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} \frac{1}{(m+1)^k} + \left(\frac{1}{(m+1)^{m+1}}\right)_{>0} \\ &> \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \end{aligned}$$

perché

$$\binom{m+1}{k} \frac{1}{(m+1)^k} = \frac{\cancel{m+1}}{\cancel{m+1}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{m+1-k+1}{m+1} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad j=0 \quad \vee \quad \quad j=1 \quad \vee \quad \quad \quad j=k-1 \quad \vee$$

$$\binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{m-k+1}{m} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\text{pu } j \geq 0 \quad \frac{n+1-j}{n+1} \geq \frac{n-j}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{n^2} + \cancel{n} - \cancel{nj} \geq \cancel{n^2} + \cancel{n} - \cancel{nj} - j$$

$$\Leftrightarrow j \geq 0$$

2) Limitatezza superiore: $\forall n \geq 2$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

perché per $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \overset{\leq 1}{\frac{n}{n}} \cdot \overset{\leq 1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \dots \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} \\ &\leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Quindi la successione ha 3 come maggiorante e dunque è limitata superiormente. $\square$

ESEMPI

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ perché $\{n^2\}_{n \geq 1}$ è una sottosucc. di $\{n\}_{n \geq 1}$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$

Per confronto:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \underset{\rightarrow e}{\geq} 2^n \xrightarrow{\text{definitivamente perché } e > 2} +\infty$$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

Per doppio confronto:

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} \underset{\rightarrow e}{\leq} 3^{1/n} \xrightarrow{\text{definitivamente perché } e < 3} 1$$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ allora

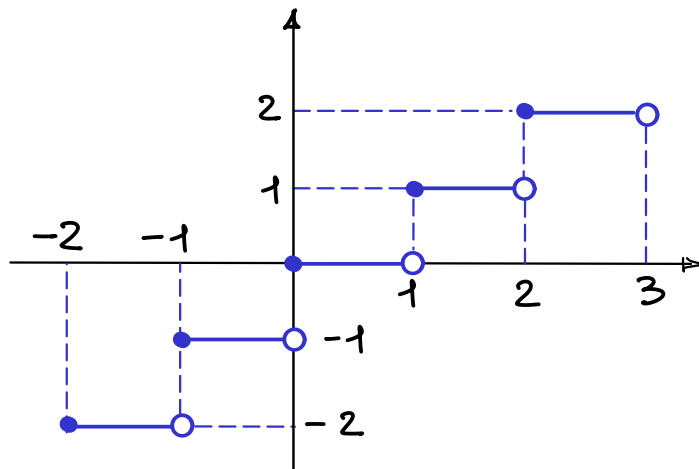
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Per doppio confronto:

$$e \leftarrow \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n] + 1} \rightarrow e$$

dove $[X]$ è la funzione PARTE INTERA

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad [X] = m \quad \text{se } x \in [m, m+1)$$



$[X]$ è il più grande intero $m \leq x$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Posto $b_n = -(a_n + 1) \rightarrow +\infty$ e

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\frac{a_n + 1}{a_n}\right)^{-a_n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{-1}}_{\rightarrow 1} \rightarrow e.$$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x.$$

Per $x=0$ è ovvio. Per $x \neq 0$, se $b_n = \frac{a_n}{x}$ allora $|b_n| \rightarrow +\infty$

$$\left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right)^x \rightarrow e^x.$$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x a_n)^{1/a_n} = e^x.$$

Posto $b_n = 1/a_n$ allora $|b_n| \rightarrow +\infty$ e

$$(1 + x a_n)^{1/a_n} = \left(1 + \frac{x}{b_n}\right)^{b_n} \rightarrow e^x.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1}\right)^{2n} = ?$$

Per $n \rightarrow \infty$, $a_n = \frac{3n+1}{n^2+1} \rightarrow 0$ e

$$\left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1}\right)^{2n} = \left(\left(1 + a_n\right)^{1/a_n}\right)^{\overbrace{a_n \cdot 2n}^{\rightarrow 6}} \rightarrow e^6.$$

$\rightarrow e$

$$a_n \cdot 2n = \frac{6n^2 + 2n}{n^2 + 1} = \frac{\overbrace{n^2}^{\rightarrow 0} \left(6 + \frac{2}{n}\right)}{\underbrace{n^2}_{\rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \rightarrow 6$$

• Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ allora

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left((1+a_n)^{1/a_n}\right) = \log(e) = 1.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\log(1+b_n)} = 1.$$

$\uparrow$
 $b_n = e^{a_n} - 1 \rightarrow 0$
 $a_n = \log(1+b_n)$

3) Per $\alpha \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{b_n} - 1}{b_n} \right) \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\log(1+a_n)}{a_n} \right) = \alpha.$$

$\uparrow$
 $b_n = \alpha \log(1+a_n) \rightarrow 0$
 $e^{b_n} = (1+a_n)^\alpha$