

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 6

ESEMPI

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
 $\log_a\left(\frac{1}{n}\right) = -\log_a(n)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + (-1)^n n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{+\infty}{n^2} \left(1 + \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}_{\rightarrow 0}\right) = +\infty$
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg(n) \cdot n - \overbrace{n^2 \sqrt{n}}^{n^{5/2}}}{\underbrace{2 \cdot n \cdot \sqrt{n^3}}_{n^{5/2}} + 3 \cdot e^{-n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^{5/2}} \left(\overset{\rightarrow \pi/2}{\arctg(n)} \cdot \overset{\rightarrow 0}{n^{-3/2}} - 1 \right)}{\cancel{n^{5/2}} \left(2 + \underbrace{3 \cdot e^{-n} n^{-5/2}}_{\rightarrow 0} \right)} = -\frac{1}{2}$$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + bn + c} - n) = +\infty - \infty$
 con $b, c \in \mathbb{R}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + bn + c} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + bn + c} + n}{\sqrt{n^2 + bn + c} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} + bn + c - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2 + bn + c} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \left(b + \underbrace{\frac{c}{n}}_{\rightarrow 0} \right)}{\cancel{n} \left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}}_{\rightarrow 0} + 1 \right)} = \frac{b}{2}$$

OSSERVAZIONE

Se il limite ha la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n}$$

con $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

usando l'identità $a^b = e^{b \log(a)}$ possiamo avere altre forme indeterminate del tipo $0 \cdot \infty$, ossia

$$1^{\pm \infty} = e^{\pm \infty \log(1)} = e^{\pm \infty \cdot 0}$$

$$(0^+)^0 = e^{0 \cdot \log(0^+)} = e^{0 \cdot (-\infty)}$$

$$(+\infty)^0 = e^{0 \cdot \log(+\infty)} = e^{0 \cdot (+\infty)}$$

In generale per a^b vale lo schema

a^b	$-\infty$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	?	0^+	0^+
$0 < a < 1$	$+\infty$	a^b	1	a^b	0^+
$a = 1$	?	1	1	1	?
$a > 1$	0^+	a^b	1	a^b	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^+	?	$+\infty$	$+\infty$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = (0^+)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = 1^{+\infty} = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^{\log(n)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)^{\frac{1}{n}} = (+\infty)^{0^+} = ?$$

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione positiva tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$L \geq 0$ per la
permanenza
del segno

1) Se $L > 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

2) Se $L < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

OSSERVAZIONE

Se $L = 1$ allora la conoscenza di L non
basta per trovare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$:

se $a_n = n$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

se $a_n = \frac{1}{n}$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ESEMPI

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$ per $b > 0$ e $a > 1$.

Sia $a_n = \frac{n^b}{a^n}$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^b} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Notiamo che se $b > 0$ e $0 < a < 1$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n^b}{a^n} \rightarrow \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$ per $a > 0$.

Sia $a_n = \frac{n!}{a^n}$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a} \rightarrow +\infty > 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = +\infty$.

Sia $a_n = \frac{2^{n^2}}{n!}$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2+2n+1-n^2}}{n+1} = 2 \cdot \frac{4^n}{n+1} \rightarrow +\infty > 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = +\infty$.

Sia $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!}{(n+1)^2 \cdot (n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 4 > 1 \end{aligned}$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

CONFRONTI TRA INFINITI

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ e supponiamo

che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty \\ l \in (0, +\infty) \\ 0 \end{cases}$ allora A

1) nel caso $+\infty$ diciamo che

a_n è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE a b_n

2) nel caso $l \in (0, +\infty)$ diciamo che

a_n è un INFINITO DELLO STESSO ORDINE di b_n

3) nel caso 0 diciamo che

a_n è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE a b_n

I seguenti infiniti sono in ordine crescente

$$\log_2(n), n^b, a^n, n!, n^n$$

dove $a > 1$ e $b > 0$.

Abbiamo già verificato che $n!$ ha ordine superiore ad a^n che ha ordine superiore a n^b .

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

perché $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\overset{\leq 1}{\frac{2}{n}} \cdot \overset{\leq 1}{\frac{3}{n}} \cdots \overset{\leq 1}{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n} \right) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$

e la conclusione vale per doppio confronto.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a(n)}{n^b} = 0$ per $a > 1$ e $b > 0$.

Per semplicità consideriamo solo il caso $b=1$.

Per $\varepsilon > 0$ devo verificare che definitivamente

$$0 < \frac{\log_a(n)}{n} < \varepsilon \iff \log_a(n) < \varepsilon n \iff n < a^{\varepsilon n}$$

$$\iff \frac{n}{(a^\varepsilon)^n} < 1 \text{ che vale definitivamente}$$

$$\text{perché } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\underbrace{(a^\varepsilon)^n}_{>1}} = 0.$$

ESEMPIO

- Confronto tra polinomi di grado $r, s \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{0}{\neq} a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \dots + a_0}{\underset{0 \neq}{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \dots + b_0}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{r-s} \cdot \frac{\overset{\rightarrow 0}{a_r} + \overset{-1}{a_{r-1} n^{-1}} + \dots + \overset{-r}{a_0 n^{-r}}}{\underset{\rightarrow 0}{b_s} + \underset{\rightarrow 0}{b_{s-1} n^{-1}} + \dots + \underset{\rightarrow 0}{b_0 n^{-s}}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } r > s \text{ e } a_r \cdot b_s > 0 \\ -\infty & \text{se } r > s \text{ e } a_r \cdot b_s < 0 \\ \frac{a_r}{b_s} & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r < s \end{cases}$$