

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 4

SUP E INF

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

$M \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di A se

$$\forall a \in A \quad a \leq M.$$

A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq M. \quad \text{A ha almeno un maggiorante}$$

$M \in \mathbb{R}$ si dice MASSIMO di A e si scrive $M = \max(A)$ se

$$\forall a \in A \quad a \leq M \quad \text{e} \quad M \in A.$$

$m \in \mathbb{R}$ si dice MINORANTE di A se

$$\forall a \in A \quad m \leq a.$$

A si dice LIMITATO INFERIORMENTE se

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a. \quad \text{A ha almeno un minorante}$$

$m \in \mathbb{R}$ si dice MINIMO di A e si scrive $m = \min(A)$ se

$$\forall a \in A \quad m \leq a \quad \text{e} \quad m \in A.$$

A si dice LIMITATO se

$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a \leq M.$$

ESEMPI

- $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

L'insieme dei maggioranti è vuoto.

L'insieme dei minoranti è $(-\infty, 0]$.

A non è limitato $\min(A) = 0$, A non ha massimo.

- $A = (-2, 1) \cup [2, 3]$

L'insieme dei maggioranti è $[3, +\infty)$.

L'insieme dei minoranti è $(-\infty, -2]$.

A è limitato. $\max(A) = 3$, A non ha minimo.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

Se A è limitato superiormente allora l'insieme dei maggioranti di A ha un elemento minimo che si dice ESTREMO SUPERIORE di A e si scrive $\sup(A)$.

Se A è limitato inferiormente allora l'insieme dei minoranti di A ha un elemento massimo che si dice ESTREMO INFERIORE di A e si scrive $\inf(A)$.

Le definizioni di $\sup$ e $\inf$ si estendono agli insiemi non limitati:

$\sup(A) = +\infty$ se A non è limitato superiormente.

$\inf(A) = -\infty$ se A non è limitato inferiormente.

OSSERVAZIONE

Se A ha un massimo allora $\max(A) = \sup(A)$.

Se A ha un minimo allora $\min(A) = \inf(A)$.

ESEMPI

- $A = \mathbb{N}$
 $\inf(A) = \min(A) = 0$ e $\sup(A) = +\infty$.
- $A = (-2, 1) \cup [2, 3]$
 $\inf(A) = -2$ e $\sup(A) = \max(A) = 3$.

$$\bullet A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2 \text{ e } 8x^3 \leq 1\}$$

$$x^2 \leq 2 \iff [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad 8x^3 \leq 1 \iff (-\infty, \frac{1}{2}] \text{ e quindi}$$

$$A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap (-\infty, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q} = [-\sqrt{2}, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q}.$$

Così

$$\inf(A) = -\sqrt{2}, \quad A \text{ non ha minimo } -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{2}.$$

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DEL SUP

$$\sup(A) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A : M < a$$

*dato un qualunque numero reale M
esiste un elemento di A più grande di M*

$$\sup(A) = l \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall a \in A \quad a \leq l & l \text{ è un maggiorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : l - \varepsilon < a \end{cases}$$

*ogni numero più piccolo di l
non è un maggiorante di A*

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DELL'INF

$$\inf(A) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A : a < M$$

*dato un qualunque numero reale M
esiste un elemento di A più piccolo di M*

$$\inf(A) = l \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall a \in A \quad l \leq a & l \text{ è un minorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < l + \varepsilon \end{cases}$$

*ogni numero più grande di l
non è un minorante di A*

ESEMPI

$$\bullet A = \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$\sup(A) = \max(A) = 1. \inf(A) \stackrel{?}{=} 0 \text{ SÌ}$$

Verifichiamo che 0 è un minorante di A

$$\underbrace{\frac{1}{m}}_{>0} \stackrel{?}{\geq} 0 \text{ VERO.}$$

Verifichiamo che 0 è il più piccolo dei minoranti di A:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : 0 + \varepsilon \stackrel{?}{>} a$$

ovvia

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N}^+ : \varepsilon \stackrel{?}{>} \frac{1}{m} \text{ vale se } \frac{1}{\varepsilon} < m \text{ VERO perché } \sup(\mathbb{N}^+) = +\infty$$

Inoltre $0 \notin A$ e quindi A non ha minimo.

OSSERVAZIONE

Vale la seguente disuguaglianza

$$\forall a, b \geq 0 \quad \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{MEDIA ARITMETICA}} \geq \underbrace{\sqrt{a \cdot b}}_{\text{MEDIA GEOMETRICA}} \quad (AG)$$

infatti

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0 \iff a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \\ &\iff a + b \geq 2\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

L'uguaglianza vale se e solo se $a = b$.

- Determinare sup/inf/max/min di

$$A = \left\{ x + \frac{5}{x} : x \in \mathbb{R}^+ \right\}. \quad \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

Notiamo che $\forall M > 0, M < M + \left(\frac{5}{M}\right)_{>0} \in A$

e quindi $\sup(A) = +\infty$. A non ha massimo.

Inoltre

$$\forall x > 0 \quad x + \frac{5}{x} \stackrel{AG}{\geq} 2\sqrt{x \cdot \frac{5}{x}} = 2\sqrt{5} \text{ e vale l' = se } x = \sqrt{5}.$$

Quindi $2\sqrt{5}$ è un minorante e appartiene ad A.

Così $\inf(A) = \min(A) = 2\sqrt{5}$ irrazionale $\in (4, 5)$.

- Determinare sup/inf/max/min di

$$A = \left\{ n + \frac{5}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Si ha che $\forall M > 0 \quad M < n + \frac{5}{n} \in A$ con n intero $> M$

e quindi $\sup(A) = +\infty$. A non ha massimo.

Come prima

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad n + \frac{5}{n} \stackrel{AG}{\geq} 2\sqrt{n \cdot \frac{5}{n}} = 2\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$$

$2\sqrt{5}$ è un minorante ma $2\sqrt{5} \notin A \subseteq \mathbb{Q}$.

$2\sqrt{5}$ è il più grande dei minoranti? NO!

$$A = \left\{ \overset{1}{6}, \overset{2}{\boxed{\frac{9}{2}}}, \overset{3}{\frac{14}{3}}, \overset{4}{\frac{21}{4}}, \overset{5}{6}, \dots \right\}$$

$\frac{9}{2} \in A$ ed è minore di $6, \frac{14}{3}, \frac{21}{4}$ inoltre

$$\forall n \geq 5 \quad \underbrace{n}_{\geq 5} + \underbrace{\frac{5}{n}}_{> 0} > 5 > \frac{9}{2}.$$

Così $\inf(A) = \min(A) = \frac{9}{2}$.

• Determinare sup/inf/max/min di

$$A = \left\{ \frac{2m-1}{m+1} : m \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1, \overset{0}{\frac{1}{2}}, \overset{1}{1}, \overset{2}{\frac{5}{4}}, \dots \right\}.$$

$$\min(A) = \inf(A) = -1? \text{ SÌ}$$

$$-1 \in A \text{ e } \forall m \geq 1 \quad \frac{2m-1}{m+1} > 0 > -1.$$

$$\sup(A)? \text{ Esiste } \max(A)?$$

Verifichiamo che 2 è un maggiorante di A

$$\underbrace{\frac{2m-1}{m+1}}_{>0} \overset{?}{\leq} 2 \iff 2m-1 \leq 2m+2 \iff -1 \leq 2 \text{ VERO}$$

Inoltre non vale mai $l' = 2$ e $2 \notin A$.

Verifichiamo che 2 è il più piccolo dei maggioranti di A:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : 2 - \varepsilon < a$$

ovvia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : 2 - \frac{2m-1}{m+1} < \varepsilon.$$

Osseviamo che

$$2 - \frac{2m-1}{m+1} = \frac{\cancel{2m+2} - \cancel{2m+1}}{m+1} < \frac{3}{m+1} \overset{?}{<} \varepsilon \text{ vale se } \frac{3}{\varepsilon} - 1 < m$$

e quindi basta prendere un intero m maggiore di $\frac{3}{\varepsilon} - 1$ (esiste perché $\sup(\mathbb{N}) = +\infty$).

Possiamo così concludere che

$$\sup(A) = 2 \text{ e } A \text{ non ha massimo.}$$