

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 9

1. Calcolare i seguenti limiti:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x + e^{-x} - 2} + \frac{1}{\log(x^2 + \cos(2x))} \right)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \log(1 + x^2)} \int_0^x t \sin(2t) e^{3t} dt$

2. Data la funzione

$$f(x) = x^2 + \log|x^2 - 3|$$

determinare il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità, i flessi e infine tracciarne il grafico.

3. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

a. $\int \frac{x^4 + 1}{(x - 1)^2(x + 1)} dx$ b. $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$
c. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x - 9)} dx$ d. $\int \log(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$

4. Calcolare i seguenti integrali definiti:

a. $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$ b. $\int_1^4 (|x - 2| - x) \log(x) dx$
c. $\int_{-1}^1 (\sqrt{3}x - 1)^2 \arctan|x| dx$ d. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \log(1 + e^x) dx$
e. $\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$ f. $\int_0^1 x \log\left(\frac{x}{2 - x}\right) dx$

5. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

a. $\int_0^2 \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a} dx$ b. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt[3]{x})}{x^a} dx$
c. $\int_0^4 \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}} dx$ d. $\int_2^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}} dx$
e. $\int_1^{+\infty} \frac{(x + 2)(x - 1)^2}{x(x^4 - 1)^a} dx$ f. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-1/(1+x^2)}}{\sqrt[3]{x} |\log x|^a} dx$

6. Risolvere i seguenti problemi:

- a. determinare $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che la funzione $f(x) = \sin(ax) + b$ soddisfi le seguenti condizioni: la media integrale di f in $[-1, 1]$ vale 4 e l'equazione $f(x) = 4$ ha almeno due soluzioni in $(-1, 1)$;
- b. fare un esempio di una funzione f integrabile in $[-1, 1]$ tale che la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ ha un punto angoloso in 0.