

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 5

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(1 + 2^x)}{\sqrt{1 + x^2} + x} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(1 + 2^x)}{\sqrt{1 + x^2} + x}$$

2. Per ciascuna funzione determinare i punti di discontinuità e i punti di non derivabilità al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| + b & \text{se } x < 3, \\ ax & \text{se } x \geq 3. \end{cases} \quad \text{b. } f(x) = \begin{cases} 2 \arcsin(x) & \text{se } x \in [-1, 1], \\ ax + bx^2 & \text{se } x \in (1, 2), \\ \sqrt{|x - 3|} & \text{se } x \in [2, 4]. \end{cases}$$

3. Per ciascuna funzione determinare la retta tangente nel punto assegnato.

$$\text{a. } f(x) = \frac{\log(x)}{2^x + x^2}, x_0 = 1 \quad \text{b. } f(x) = \frac{\pi^2 \sqrt{3 + e^x}}{\arctan(x + 1)}, x_0 = 0$$

4. Per ciascuna funzione f tracciarne il grafico specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

$$\text{a. } f(x) = x^{1/x} \quad \text{b. } f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$$

5. Per ciascuna funzione f tracciarne il grafico specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

$$\text{a. } f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x} \quad \text{b. } f(x) = \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x - 2)^2}$$

6. Fare un esempio di:

- a. una funzione derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$ con infiniti punti stazionari;
- b. una funzione f continua in $[0, 2]$ tale che $f(0) = f(2)$, ma non esiste nessun $x \in (0, 2)$ tale che $f'(x) = 0$;
- c. una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $f(\mathbb{R}) = (-1, 1]$.