

Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 4
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{4^{n \log(n)}}.$$

Riscrivo la successione come

$$\frac{n^n}{4^{n \log(n)}} = \frac{4^{n \log_4(n)}}{4^{n \ln(n)}} = 4^{n \log_4(n) - n \ln(n)}.$$

Così per $n \rightarrow \infty$,

$$n \log_4(n) - n \ln(n) = n \ln(n) \underbrace{\left(\frac{1}{\ln(4)} - 1 \right)}_{<0} \rightarrow -\infty$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{4^{n \ln(n)}} = 0.$$

Esercizio 1.b. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2n+2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(2n+2)(2n+1) \cdot n^{2n}}{(n+1)^2 \cdot (n+1)^{2n}} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{-2} \rightarrow 4e^{-2} < 1. \end{aligned}$$

Possiamo così concludere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} = 0.$$

Osservazione: ancora con il criterio del rapporto si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!}{n^{2n}} = +\infty,$$

quindi il valore del limite di $\frac{(An)!}{n^{Bn}}$ dipende dai numeri interi positivi A e B e non solo dal fatto che si tratta di un rapporto tra un fattoriale e una potenza di n^n .

Esercizio 1.c. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(6^{1/n} - 3^{1/n}).$$

Ricordando che per $a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a),$$

per $n \rightarrow \infty$,

$$n(6^{1/n} - 3^{1/n}) = \underbrace{3^{1/n}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{2^{1/n} - 1}{1/n}}_{\rightarrow \ln(2)} \rightarrow \ln(2).$$

Esercizio 1.d. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n \log(n+3)}}{e^{n \log(n+1)}}.$$

Abbiamo che

$$\frac{e^{n \log(n+3)}}{e^{n \log(n+1)}} = \frac{(n+3)^n}{(n+1)^n} = \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{e^3}{e} = e^2.$$

Esercizio 1.e. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+4}} - 1 \right).$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$n \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+4}} - 1 \right) = \frac{5n}{n+4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{5}{n+4}\right)^{1/2} - 1}{\frac{5}{n+4}} \rightarrow \frac{5}{2}.$$

Esercizio 1.f. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \right).$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{n} - \sqrt{n - \sqrt{n}} = \sqrt{n} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1/2} - 1}{-1/\sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.a. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan(2x^3) - x^3}{x^2(\cos(3\sqrt{x}) - 1)}.$$

Per $x \rightarrow 0$

$$\frac{2 \arctan(2x^3) - x^3}{x^2(\cos(3\sqrt{x}) - 1)} = \frac{4 \frac{\arctan(2x^3)}{2x^3} - 1}{-9 \frac{1 - \cos(3\sqrt{x})}{9x}} \rightarrow \frac{4 - 1}{-9 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

Esercizio 2.b. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{8 + \sin(2/n)} - 2 \right).$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$n \left(\sqrt[3]{8 + \sin(2/n)} - 2 \right) = \frac{2}{4} \cdot \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{\sin(2/n)}{8}\right)^{1/3} - 1}{\frac{\sin(2/n)}{8}}}_{\rightarrow 1/3} \cdot \underbrace{\frac{\sin(2/n)}{2/n}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{1}{6}.$$

Esercizio 2.c. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(2) - \log(x)}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}.$$

Per $x \rightarrow 2$,

$$\frac{\log(2/x)}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} = \underbrace{\frac{\log(1 + (2/x - 1))}{2/x - 1}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{2/x - 1}{2 - x}}_{\rightarrow 1/2} \cdot \underbrace{(\sqrt{2} + \sqrt{x})}_{\rightarrow 2\sqrt{2}} \rightarrow \sqrt{2}.$$

Esercizio 2.d. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi/x)}{\sqrt{2x} - 2}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi/x)}{\sqrt{2x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi/x)}{2(x - 2)} \cdot (\sqrt{2x} + 2) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(\pi/x)}{x - 2} \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{\frac{4t}{\pi - 2t}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} \cdot (\pi - 2t) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

dove $t = \pi/2 - \pi/x$.

Esercizio 2.e. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{-1/x} + \sin(x)) .$$

Sia $f(x) = x(e^{-1/x} + \sin(x))$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(2\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi n (e^{-1/(2\pi n)} + 0) = +\infty .$$

Quindi se il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ esiste, deve essere $+\infty$.

D'altra parte $2\pi n + 3\pi/2 \rightarrow +\infty$, ma

$$f(2\pi n + 3\pi/2) = (2\pi n + 3\pi/2) (\underbrace{e^{-1/(2\pi n + 3\pi/2)}}_{<1} - 1) < 0$$

e quindi lungo tale successione la funzione non può divergere a $+\infty$.

Possiamo così concludere che il limite richiesto non esiste.

Esercizio 2.f. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x^{1-\frac{1}{x}} - x} .$$

Abbiamo che per $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^{1-\frac{1}{x}} - x} &= \frac{\ln(x^2(1 + 1/x^2))}{x(e^{-\ln(x)/x} - 1)} = \frac{2 \ln(x) + \ln(1 + 1/x^2)}{x(e^{-\ln(x)/x} - 1)} \\ &= \underbrace{\frac{2 \ln(x) + \ln(1 + 1/x^2)}{\ln(x)}}_{\rightarrow 2} \cdot \underbrace{\frac{\ln(x)/x}{e^{-\ln(x)/x} - 1}}_{\rightarrow -1} \rightarrow -2 . \end{aligned}$$

Esercizio 3.a. Determinare la derivata di

$$f(x) = \cos(\pi/x)(3 + \sqrt{x}).$$

La derivata della funzione è

$$f'(x) = -\sin(\pi/x) \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) (3 + \sqrt{x}) + \cos(\pi/x) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esercizio 3.b. Determinare la derivata di

$$f(x) = x \log(1 + x^2) \tan(2x).$$

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \log(1 + x^2) \tan(2x) + x \frac{2x}{1 + x^2} \tan(2x) + x \log(1 + x^2) \frac{2}{\cos^2(2x)}.$$

Esercizio 3.c. Determinare la derivata di

$$f(x) = \frac{x \sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{(\sin(x) + x \cos(x))(1 + \cos(x)) + x \sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2}.$$

Esercizio 2.d. Determinare la derivata di

$$f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \left(-\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right)}{(\arccos(x))^2}.$$

Esercizio 4.a. Data la funzione

$$f(x) = x + \sin(x)$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = 1 + \cos(x).$$

Abbiamo che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\cos(x) \geq -1$. Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ = 0 & \text{se } x \in \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ < 0 & \text{mai.} \end{cases}$$

Esercizio 4.b. Data la funzione

$$f(x) = x^{1/x}$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = (0, +\infty)$ si ha che

$$f'(x) = \frac{x^{1/x}(1 - \log(x))}{x^2}.$$

Così, per $x > 0$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \log(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e.$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (0, e), \\ = 0 & \text{se } x = e, \\ < 0 & \text{se } x \in (e, +\infty). \end{cases}$$

Esercizio 4.c. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - |2x + 1|}{x^2 + 1}$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x > -1/2, \\ -\frac{2(x^2 + 2x - 1)}{(x^2 + 1)^2} & \text{se } x < -1/2. \end{cases}$$

Nel punto $x = -\frac{1}{2}$ la funzione non è derivabile (la derivata destra è diversa dalla derivata sinistra). Studiando il segno di f' troviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1/2) \cup (1, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-1 - \sqrt{2}, 1\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1/2, 1). \end{cases}$$

Esercizio 4.d. Data la funzione

$$f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in D = \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = -2e^{-x^2}x(x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, 2].$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty). \end{cases}$$

Esercizio 4.e. Data la funzione

$$f(x) = x \log |x|$$

determinare f' e studiarne il segno.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha che

$$f'(x) = \log |x| + 1.$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1/e] \cup [1/e, +\infty).$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -1/e) \cup (1/e, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x \in \{-1/e, 1/e\}, \\ < 0 & \text{se } x \in (-1/e, 0) \cup (0, 1/e). \end{cases}$$

Esercizio 4.f. Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} - 4 \log(\sqrt{x} + 1)$$

determinare f' e studiarne il segno.

Il dominio è $D = [0, +\infty)$. Per $x \in D \setminus \{0\} = (0, +\infty)$ si ha che

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}.$$

f non è derivabile in $x = 0$. Così, per $x > 0$,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 3 \Leftrightarrow x \in [9, +\infty).$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \in (9, +\infty), \\ = 0 & \text{se } x = 9, \\ < 0 & \text{se } x \in (0, 9). \end{cases}$$

Esercizio 5.a. Fare un esempio di una funzione continua in $(0, 1)$, non limitata e con un punto di minimo assoluto.

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$

ha le proprietà richieste. f è continua in $(0, 1)$ ed è non limitata perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$f'(x) = \frac{2x-1}{(x(1-x))^2}$$

e quindi f è crescente in $[1/2, 1)$ ed è decrescente in $(0, 1/2]$. Ne segue che $x = 1/2$ è un punto di minimo assoluto.

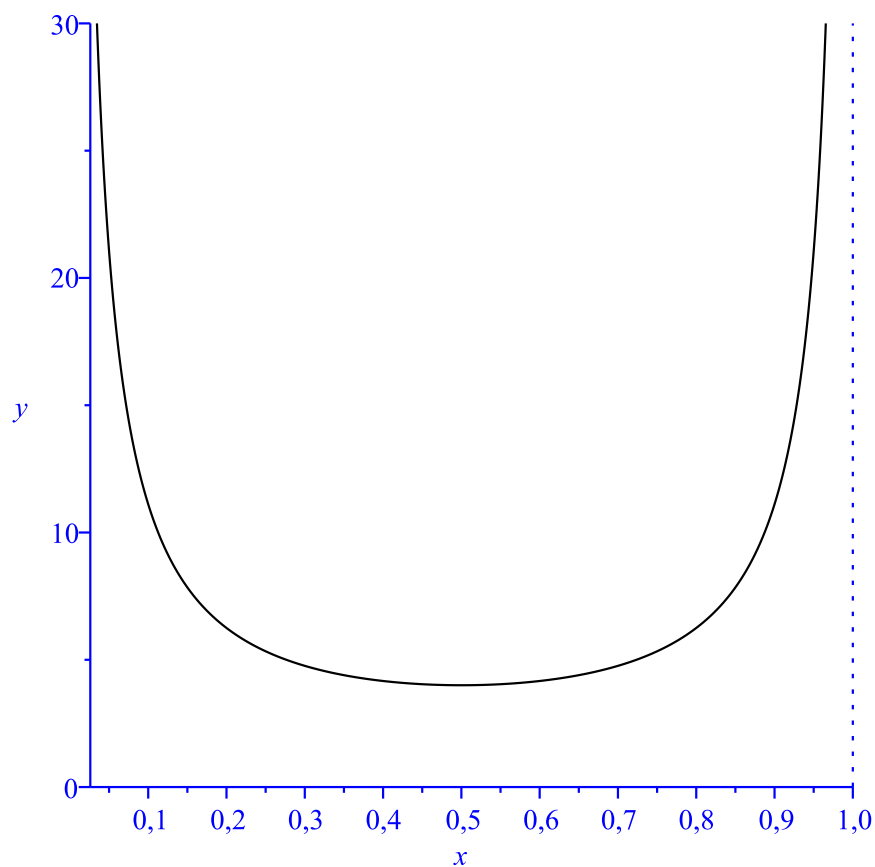


Grafico di $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$

Esercizio 5.b. Fare un esempio di una funzione continua in $\mathbb{R}$, limitata tra 0 e 2, senza punti di massimo assoluto e senza punti di minimo assoluto.

La funzione

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x) + 1$$

ha le proprietà richieste. f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ con la derivata strettamente positiva:

$$f'(x) = \frac{2/\pi}{1+x^2} > 0.$$

Quindi f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 + 1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 1 = 2$$

implica che $f(\mathbb{R}) = (0, 2)$.

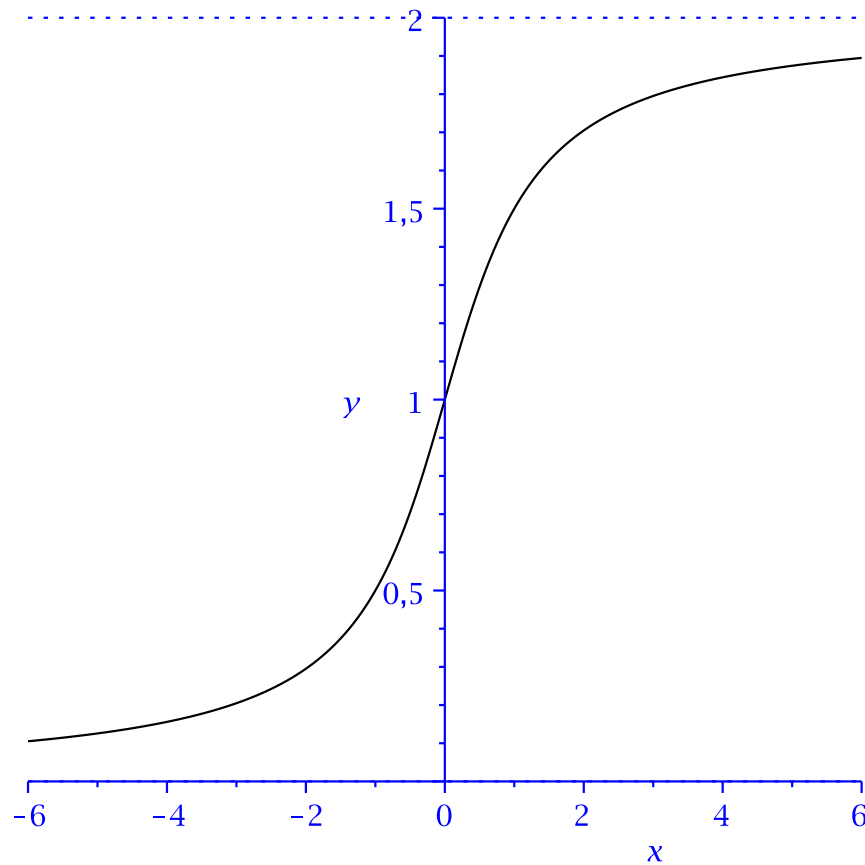


Grafico di $f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x) + 1$