Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 3
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{n^2+n^3}}.$$

Abbiamo che per $n \to \infty$,
$$\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{n^2+n^3}} = 3 \cdot \sqrt[n]{\frac{(2/3)^n+1}{n^3(1/n+1)}} = 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{1+(2/3)^n}}{(\sqrt[n]{n})^3\sqrt[n]{1+1/n}} \to 3$$
in quanto
$$\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \to 1 \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{a_n} = \exp\left(\frac{\log(a_n)}{n}\right) \to 1$$
se $a_n \to L > 0$.

Esercizio 1.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^n - n^n}.$$

Ricordando che per $n \geq 1$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}}_{\geq 0} \geq 2$$
abbiamo
$$\sqrt[n]{(n+1)^n - n^n} = n\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1} \geq n\sqrt[n]{2-1} = n$$
e quindi per confronto
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^n - n^n} = +\infty.$$

Esercizio 1.c. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n+1}-\sqrt{9n+8}}{\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n+7}}.$$

Razionalizzando sia il numeratore che il denominatore, si ha che per $n \to \infty$,
$$\frac{\sqrt{9n+1}-\sqrt{9n+8}}{\sqrt{4n-1}-\sqrt{4n+7}} = \frac{(9n+1)-(9n+8)}{(4n-1)-(4n+7)} \cdot \frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+7}}{\sqrt{9n+1}+\sqrt{9n+8}}$$
$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt{4n}}{\sqrt{9n}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4n}}+\sqrt{1+\frac{7}{4n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{9n}}+\sqrt{1+\frac{8}{9n}}} \to \frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{7}{12}.$$

Esercizio 1.d. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)! - (2n)!}{n^2((2n+1)! - (2n)!)}.$$

Dividendo sia il numeratore che il denominatore per $(2n)!$, si ha che per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}\frac{(2n+3)! - (2n)!}{n^2((2n+1)! - (2n)!)} &= \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1) - 1}{n^2((2n+1) - 1)}\\ &= \frac{n^3\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 1}{2n^3} \to \frac{8}{2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.e. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^n \cdot n!}.$$

Applicando il criterio del rapporto,

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{4^n n!}{n^n} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{4} < 1$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^n \cdot n!} = 0.$$

Esercizio 1.f. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}.$$

Applicando il criterio del rapporto,

$$\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!n^n}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{4}{e} > 1$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n^n} = +\infty.$$

Esercizio 1.g. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \ln(\cos(1/n)).$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2},$$

allora per $n \to \infty$, $1/n \to 0$, $\cos(1/n) - 1 \to 0$ e

$$n^2 \ln(\cos(1/n)) = \underbrace{\frac{\ln(1+(\cos(1/n)-1))}{\cos(1/n)-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos(1/n)-1}{1/n^2}}_{\to -1/2} \to -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 1.h. Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt[4]{\frac{n+1}{n+6}} - 1 \right).$$

Ricordando che per $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a,$$

allora per $n \to \infty$, $-5n/(n+6) \to 0$ e

$$n \left(\sqrt[4]{\frac{n+1}{n+6}} - 1 \right) = \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{-5}{n+6}\right)^{1/4} - 1}{\frac{-5}{n+6}}}_{\to 1/4} \cdot \underbrace{\frac{-5n}{n+6}}_{\to -5} \to -\frac{5}{4}.$$

Esercizio 2.a. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Per $n\to\infty$,
$$\left(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n=\exp\left(n\cdot\underbrace{\frac{\ln(1-\frac{2}{\sqrt{n}})}{-\frac{2}{\sqrt{n}}}}_{\to 1}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)\to 0$$
perché l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$.

Esercizio 2.b. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Per $n\to\infty$,
$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\exp\left(\sqrt{n}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+2/n)}{2/n}}_{\to 1}\cdot(2/n)\right)\to 1$$
perché l'argomento dell'esponenziale tende a 0.

Esercizio 2.c. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n+1}}.$$

Per $n\to\infty$,
$$\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n+1}}=\left(\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n-1}}\right)^4\to e^4.$$

Esercizio 2.d. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{\log(n^2)}\right)^{\log(\sqrt{n})}.$$

Per $n\to\infty$,
$$\left(1+\frac{3}{\log(n^2)}\right)^{\log(\sqrt{n})}=\left(\left(1+\frac{3/2}{\log(n)}\right)^{\log(n)}\right)^{1/2}\to\left(e^{3/2}\right)^{1/2}=e^{3/4}.$$

Esercizio 2.e. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+4}{2n^2-3n+6}\right)^{3n+2}.$$

Per $n\to\infty$,
$$\begin{aligned}\left(\frac{2n^2+5n+4}{2n^2-3n+6}\right)^{3n+2} &= \exp\left((3n+2)\cdot\frac{\ln(1+\frac{8n-2}{2n^2-3n+6})}{\frac{8n-2}{2n^2-3n+6}}\cdot\frac{8n-2}{2n^2-3n+6}\right)\\ &= \exp\left(\underbrace{\frac{(3n+2)(8n-2)}{2n^2-3n+6}}_{\to 12}\cdot\underbrace{\frac{\ln(1+\frac{8n-2}{2n^2-3n+6})}{\frac{8n-2}{2n^2-3n+6}}}_{\to 1}\right)\to e^{12}\end{aligned}$$

Esercizio 2.f. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+2^{n+1}}{3^n+2^{n-1}}\right)^{(3/2)^n}.$$

Per $n\to\infty$,
$$\left(\frac{3^n+2^{n+1}}{3^n+2^{n-1}}\right)^{(3/2)^n}=\frac{\left(1+\frac{2}{(3/2)^n}\right)^{(3/2)^n}}{\left(1+\frac{1/2}{(3/2)^n}\right)^{(3/2)^n}}\to\frac{e^2}{e^{1/2}}=e^{3/2}.$$

Esercizio 3.a. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x^2)^\pi-1}{(1+x)^3+(1-x)^3-2}.$$

Per $x\to 0$, dopo aver semplificato il denominatore,
$$\frac{(1+2x^2)^\pi-1}{6x^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+2x^2)^\pi-1}{2x^2}\to\frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 3.b. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{9^x-4^x}{\tan(2x)}.$$

Per $x\to 0$,
$$\frac{9^x-4^x}{\tan(2x)}=\Big(\underbrace{\frac{9^x-1}{x}}_{\to\log(9)}-\underbrace{\frac{4^x-1}{x}}_{\to\log(4)}\Big)\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{2x}{\tan(2x)}}_{\to 1}\to\frac{\log(9)-\log(4)}{2}=\log(3/2)$$

dove abbiamo applicato, per $a>0$,
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log(a)}-1}{x}=\log(a)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log(a)}-1}{x\log(a)}=\log(a).$$

Esercizio 3.c. Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\sin(3^x-1)}.$$

Per $x\to 0$
$$\frac{\log(1+2x)}{\sin(3^x-1)}=\underbrace{\frac{\log(1+2x)}{2x}}_{\to 1}\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{x}{3^x-1}}_{\to 1/\ln(3)}\cdot\underbrace{\frac{3^x-1}{\sin(3^x-1)}}_{\to 1}\to\frac{2}{\log(3)}.$$

Esercizio 3.d. Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(2^x-1)}{\log(1+2x^2)}.$$

Per $x\to 0^+$
$$\frac{\sin(2^x-1)}{\log(1+2x^2)}=\underbrace{\frac{\sin(2^x-1)}{2^x-1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{2^x-1}{x}}_{\to\log(2)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{\frac{2x^2}{\log(1+2x^2)}}_{\to 1}\to+\infty.$$

Esercizio 4.a. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ (-1)^n (7 - e^{-n}) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$-7 < -7 + e^{-n} \leq (-1)^n (7 - e^{-n}) \leq 7 - e^{-n} < 7.$$

Quindi 7 è un maggiorante di A e $7 \notin A$ e -7 è un minorante di A e $-7 \notin A$.
Verifichiamo che 7 è il più piccolo del maggioranti: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $a \in A$ tale che $7 - \varepsilon < a$?
Sì, dato che $\lim_{n \to \infty} e^{-n} = 0$, esiste un intero pari n tale che $e^{-n} < \varepsilon$ e dunque

$$7 - \varepsilon < a = (-1)^n (7 - e^{-n}) = 7 - e^{-n}.$$

Così $\sup(A) = 7$ e il massimo non esiste.
In modo simile si verifica che $\inf(A) = -7$ e il minimo non esiste.

Esercizio 4.b. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ 4\cos^2(x) - 2\sin(x + \pi) - 1 \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Dato che $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,

$$A = \left\{ -4\sin^2(x) + 2\sin(x) + 3 \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Inoltre $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ implica che

$$A = \left\{ -4t^2 + 2t + 3 \ : \ t \in [-1, 1] \right\}.$$

La funzione $f(t) = -4t^2 + 2t + 3$ è una parabola con concavità verso il basso il cui vertice è posizionato in $(1/4, 13/4)$. Dato che $1/4 \in [-1, 1]$ possiamo concludere che

$$\sup(A) = \max(A) = \frac{13}{4}.$$

Per il minimo dobbiamo valutare f agli estremi:

$$\inf(A) = \min(A) = \min\left(\{f(-1), f(1)\}\right) = \min(\{-3, 1\}) = -3.$$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n! \le n^n \le 2^n \cdot (n!)^2$$

e calcolare i seguenti limiti

$$\textbf{a.} \quad \lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n^2} \qquad\qquad \textbf{b.} \quad \lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n}.$$

Proviamo prima la doppia disuguaglianza

$$\forall n \ge 1, \qquad n! \le n^n \le 2^n (n!)^2.$$

Per la prima basta notare che ogni fattore di $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ è minore o uguale ad ogni fattore di $n^n = n \cdot n \cdots n \cdot n$.
La seconda la dimostriamo per induzione. Vale per $n = 1$.
Per il passo induttivo, facciamo vedere che se $n \ge 1$ e $n^n \le 2^n (n!)^2$ allora

$$(n+1)^{n+1} \le 2^{n+1}((n+1)!)^2.$$

Ricordando che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$,

$$\begin{aligned}(n+1)^{n+1} &= (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot n^n \\ &\le (n+1) \cdot e \cdot 2^n (n!)^2 \le 2^{n+1}((n+1)!)^2\end{aligned}$$

dove all'ultimo passaggio abbiamo usato $e < 4 \le 2(n+1)$.

a. Per la prima disuguaglianza di cui sopra

$$1 \le (n!)^{1/n^2} \le (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n} \to 1$$

e dunque per il doppio confronto

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n^2} = 1.$$

b. Per la seconda disuguaglianza di cui sopra

$$(n!)^{1/n} \ge \left(\frac{n^n}{2^n}\right)^{1/(2n)} = \sqrt{n/2} \to +\infty$$

e dunque, per confronto,

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = +\infty.$$