

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 3

1. Calcolare i seguenti limiti:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{n^2 + n^3}}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)^n - n^n}$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n+1} - \sqrt{9n+8}}{\sqrt{4n-1} - \sqrt{4n+7}}$

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)! - (2n)!}{n^2((2n+1)! - (2n)!)}$

e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{4^n \cdot n!}$

f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}$

g. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln(\cos(1/n))$

h. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[4]{\frac{n+1}{n+6}} - 1 \right)$

2. Calcolare i seguenti limiti:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^n$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\sqrt{n}}$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}} \right)^{2^{n+1}}$

d. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\log(n^2)} \right)^{\log(\sqrt{n})}$

e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5n + 4}{2n^2 - 3n + 6} \right)^{3n+2}$

f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n + 2^{n+1}}{3^n - 2^{n-1}} \right)^{(3/2)^n}$

3. Calcolare i seguenti limiti:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x^2)^\pi - 1}{(1+x)^3 + (1-x)^3 - 2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 4^x}{\tan(2x)}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin(3^x - 1)}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2^x - 1)}{\log(1+2x^2)}$

4. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo:

a. $\{(-1)^n (7 - e^{-n}) : n \in \mathbb{N}\}$

b. $\{4 \cos^2(x) - 2 \sin(x + \pi) - 1 : x \in \mathbb{R}\}$

5. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n! \leq n^n \leq 2^n \cdot (n!)^2$$

e calcolare i seguenti limiti:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n^2}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n}$