Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 21/1/2026

Esercizio 1. Sia $f(x) = (x^2 - 2x - 7)e^{-x}$.
a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.
b) Per quali valori di $c \in \mathbb{R}$, l'equazione $(x-1)^2 = 8 - ce^x$ ha esattamente 3 soluzioni?

a) Il dominio è $D = \mathbb{R}$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2x - 7)e^{-x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}(x^2 - 2x - 7)e^{-x} = +\infty.$$

Dato che $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, c'è solo l'asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$.
Per $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x-2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 7)(-e^{-x}) = -(x^2 - 4x - 5)e^{-x} = -(x+1)(x-5)e^{-x}$$

Studiando il segno di f' si deduce che f è strettamente crescente in $[-1, 5]$, mentre è strettamente decrescente in $(-\infty, -1]$ e in $[5, +\infty)$. Dunque $x = 5$ è un punto di massimo relativo e $x = -1$ è un punto di minimo assoluto.
Per $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -(2x-4)e^{-x} - (x^2 - 4x - 5)(-e^{-x}) = (x^2 - 6x - 1)e^{-x}.$$

Dal segno di f'' si trova che f è concava in $(-\infty, 3-\sqrt{10}]$ e $[3+\sqrt{10}, +\infty)$ ed è convessa in $[3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}]$. Quindi $x = 3 \pm \sqrt{10}$ sono punti di flesso.

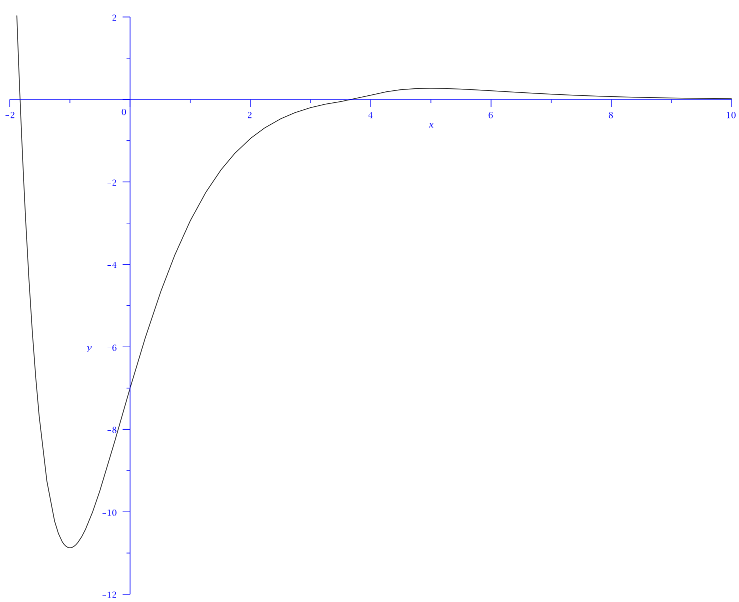

Grafico di $f(x) = (x^2 - 2x - 7)e^{-x}$

b) L'equazione $(x-1)^2 = 8 - ce^x$ è equivalente a

$$x^2 - 2x + 1 = 8 - ce^x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = -ce^x \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 7)e^{-x} = -c,$$

ossia a $f(x) = -c$.
Osservando il grafico e applicando il teorema dei valori intermedi alla funzione continua f si ottiene che l'equazione $f(x) = -c$ ha esattamente 3 soluzioni se e solo se $-c$ appartiene all'intervallo aperto di estremi 0 (il limite a + infinito) e $f(5) = 8e^{-5}$ (il valore nel punto di massimo relativo), ossia se c soddisfa le condizioni:

$$-8e^{-5} < c < 0.$$

Esercizio 2. a) Al variare di $b \in \mathbb{R}$, calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}$.

b) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} - x\right)$.

a) Abbiamo che per $x \to +\infty$, $1/x \to 0^+$ e

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2} - 1\right) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} + o(1/x) - 1\right) = x^{-1/2} + o(x^{-1/2}).$$

Così, dato che $x^{-1/2} \to 0^+$,

$$\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) = \sin(x^{-1/2} + o(x^{-1/2})) = x^{-1/2} + o(x^{-1/2}).$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} = \lim_{x\to+\infty} x^{b+1/2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > -1/2 \\ 1 & \text{se } b = -1/2 \\ 0 & \text{se } b < -1/2 \end{cases}.$$

b) Riprendiamo l'analisi fatta in a) e aumentiamo l'ordine degli sviluppi:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2}-\sqrt{x} &= \sqrt{x}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2} - 1\right) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{x^2} + o(1/x^2) - 1\right) \\ &= x^{-1/2} - \frac{x^{-3/2}}{2} + o(x^{-3/2}).\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) &= x^{-1/2} - \frac{x^{-3/2}}{2} - \frac{1}{6}\left(x^{-1/2} - \frac{x^{-3/2}}{2} + o(x^{-3/2})\right)^3 + o(x^{-3/2}) \\ &= x^{-1/2} - \frac{x^{-3/2}}{2} - \frac{x^{-3/2}}{6} + o(x^{-3/2}) \\ &= x^{-1/2} - \frac{2x^{-3/2}}{3} + o(x^{-3/2}).\end{aligned}$$

Quindi per $x \to +\infty$, $t = x^{-1/2} \to 0^+$ e

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} - x &= \frac{1/t}{t - \frac{2t^3}{3} + o(t^3)} - \frac{1}{t^2} = \frac{t - \left(t - \frac{2t^3}{3} + o(t^3)\right)}{t^3 - \frac{2t^5}{3} + o(t^5)} \\ &= \frac{\frac{2t^3}{3} + o(t^3)}{t^3 + o(t^3)} \to \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 3. a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$,

$$\frac{4^n (n!)^2}{2n} \leq (2n)! \leq 4^n (n!)^2.$$

b) Fare un esempio di $x \in (0,1)$ tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^n}{(n!)^2}$ sia convergente.

a) Dimostriamo separatamente le due disuguaglianze per induzione.

1) $\forall n \geq 1, \quad (2n)! \leq 4^n (n!)^2 \quad (P(n))$.

Passo base. Verifichiamo $P(1)$: $(2)! = 2 \leq 4 = 4^1 (1!)^2$.
Passo induttivo. Dimostriamo che, per $n \geq 1$, se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$(2(n+1))! = (2n+2)(2n+1)(2n)! \overset{P(n)}{\leq} (2n+2)(2n+1)4^n (n!)^2 \overset{?}{\leq} 4^{n+1}((n+1)!)^2$$

dove l'ultimo passaggio vale se

$$(2n+2)(2n+1) \leq 4(n+1)^2 \Leftrightarrow 2n+1 \leq 2(n+1) = 2n+2$$

che è vera.

2) $\forall n \geq 1, \quad \dfrac{4^n (n!)^2}{2n} \leq (2n)! \quad (P(n))$.

Passo base. Verifichiamo $P(1)$: $\frac{4^1 (1!)^2}{2} = 2 \leq (2)!$.
Passo induttivo. Dimostriamo che, per $n \geq 1$, se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$(2(n+1))! = (2n+2)(2n+1)(2n)! \overset{P(n)}{\geq} (2n+2)(2n+1)\frac{4^n (n!)^2}{2n} \overset{?}{\geq} \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{2(n+1)}$$

dove l'ultimo passaggio vale se

$$\frac{(2n+2)(2n+1)}{n} \geq \frac{4(n+1)^2}{n+1} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n} \geq 2 \Leftrightarrow 2n+1 \geq 2n$$

che è vera.

b) Se $x \in (0,1)$, per la seconda disuguaglianza data in a),

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^n}{(n!)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (4x)^2.$$

Notiamo che la serie geometrica a destra converge se $4x < 1$ ossia se $x < 1/4$. Allora per confronto anche la serie data converge per $x < 1/4$. Ad esempio converge se $x = 1/5$.

Alla stessa conclusione si arriva applicando il criterio del rapporto.

Esercizio 4. a) Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{cases} 2xy(x) = \left(y'(x) - \dfrac{4}{4x^2+1}\right)(1-x^2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

b) Per quali valori di $a > 0$ l'integrale $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \left|\frac{y(x)}{\log(x)}\right|^a dx$ è convergente?

a) Risistemando i termini abbiamo che

$$y'(x) + \frac{2x}{x^2-1}\, y(x) = \frac{4}{4x^2+1}.$$

Quindi $a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$,

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{2x}{x^2-1}\, dx = \log|x^2-1|$$

e il fattore integrante per $x \in (-1, 1)$ è $e^{A(x)} = 1 - x^2$.
Inoltre

$$\int e^{A(x)} f(x)\, dx = \int \frac{4-4x^2}{4x^2+1}\, dx = \int \left(\frac{5}{4x^2+1} - 1\right) dx = \frac{5}{2}\arctan(2x) - x + c.$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx = \frac{\frac{5}{2}\arctan(2x) - x + c}{1-x^2}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 2$ si trova $c = 2$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{\frac{5}{2}\arctan(2x) - x + 2}{1-x^2}.$$

b) L'unico punto da indagare è 1^-. Per $x \to 1^-$,

$$y(x) \sim \frac{\frac{5}{2}\arctan(2x) - x + 2}{(1-x)(1+x)} \sim \frac{C}{1-x} \quad \text{e} \quad \log(x) = \log(1 + x - 1) \sim x - 1.$$

Così, per $x \to 1^-$,

$$\left|\frac{y(x)}{\log(x)}\right|^a \sim \frac{|C|^a}{|x-1|^{2a}}$$

e si conclude che l'integrale dato converge se e solo se $2a < 1$ ossia se $a < 1/2$.