

Cognome:	
Nome:	
Orale:	29/1 16/2

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1. Sia $f(x) = (x^2 - 2x - 7)e^{-x}$.

- a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.
 b) Per quali valori di $c \in \mathbb{R}$, l'equazione $(x-1)^2 = 8 - ce^x$ ha esattamente 3 soluzioni?

Esercizio 2. a) Al variare di $b \in \mathbb{R}$, calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{\sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})}$.

b) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})} - x \right)$.

Esercizio 3. a) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$,

$$\frac{4^n (n!)^2}{2n} \leq (2n)! \leq 4^n (n!)^2.$$

b) Fare un esempio di $x \in (0, 1)$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{(n!)^2}$ sia convergente.

Esercizio 4. a) Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{cases} 2xy(x) = \left(y'(x) - \frac{4}{4x^2 + 1} \right) (1 - x^2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

b) Per quali valori di $a > 0$ l'integrale $\int_{1/2}^1 \left| \frac{y(x)}{\log(x)} \right|^a dx$ è convergente?