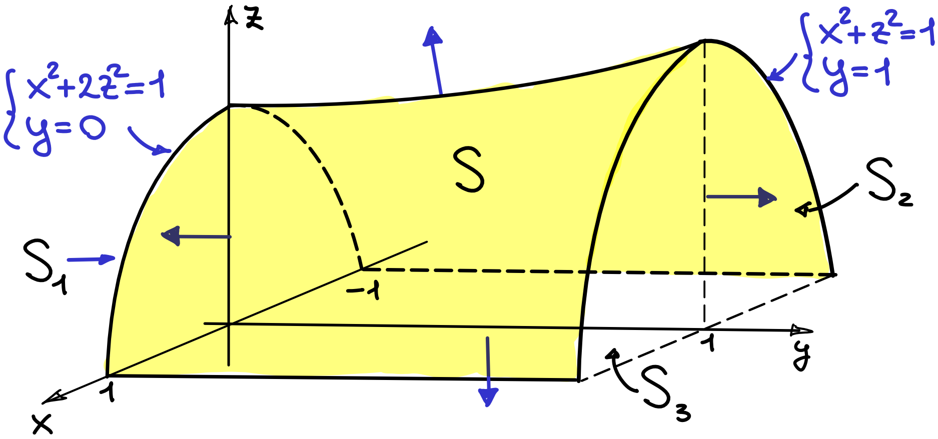
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 42

ESERCIZI DI RIEPILOGO - PARTE 5

$\boxed{21}$ Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y,z) = (2xy, -2y^2, 5y+2yz)$ e $S = \{(x,y,z) : x^2+(2-y)z^2=1, 0 \leq y \leq 1, z \geq 0\}$.

S è orientata in modo che $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto.



Notiamo che $\mathrm{div}(\vec{F}) = 2y - 4y + 2y = 0$.

Quindi, per il teorema della divergenza,

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \overset{TD}{=} \iiint_D \overset{0}{\overset{\parallel}{\mathrm{div}(\vec{F})}} - \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

dove D è il solido racchiuso da $S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ con

$$S_1 = \{(x,0,z) : x^2+2z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\} \quad \vec{n} = (0,-1,0),$$

$$S_2 = \{(x,1,z) : x^2+z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\} \quad \vec{n} = (0,1,0),$$

$$S_3 = \{(x,y,0) : x \in [-1,1], y \in [0,1]\} \quad \vec{n} = (0,0,-1).$$

Così

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$= -\iint_{S_1} \langle (*, 0, *), (0, -1, 0) \rangle \quad = 0$$

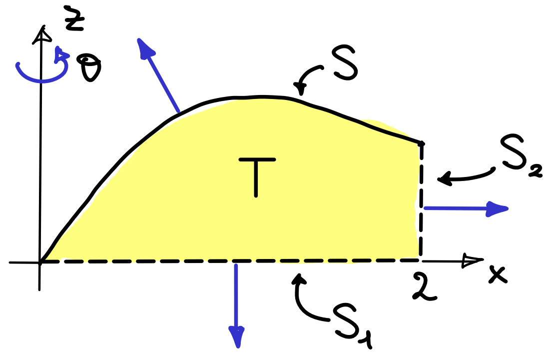
$$-\iint_{S_2} \langle (*, -2, *), (0, 1, 0) \rangle \quad = 2|S_2| = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$-\iint_{S_3} \langle (*, *, 5y), (0, 0, -1) \rangle \quad = 5 \cdot 2 \cdot \int_0^1 y\,dy = 5$$

$$= 0 + \pi + 5 = \pi + 5.$$

$\boxed{22}$ Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z + x^2 + y^2)$ e S è la superficie generata dalla rotazione completa di $C = \{(x, 0, xe^{-x}) : x \in [0,2]\}$ attorno all'asse z. S è orientata in modo che $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto.

In alternativa al calcolo diretto applichiamo il teorema della divergenza al dominio D ottenuto ruotando



$$T = \{(x, 0, z) : 0 \leq z \leq xe^{-x}, x \in [0,2]\}.$$

Il bordo di D è dato da $S \cup S_1 \cup S_2$ dove

$$S_1 = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, 0) : \theta \in [0, 2\pi], r \in [0,2]\}$$ cerchio

e

$$S_2 = \{(2\cos\theta, 2\sin\theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2e^{-2}]\}$$ superficie cilindrica

orientate come in figura.

Quindi:

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\,dy\,dz - \iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$= 12\pi(1 - 5e^{-2}) + 8\pi - 16\pi e^{-2} = 20\pi - 76\pi e^{-2}.$$

Infatti $\operatorname{div}(\vec{F}) = 3$,

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\,dy\,dz = 3\int_{\rho=0}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^{\rho e^{-\rho}} dz \right) \rho\, d\theta\, d\rho = 6\pi \int_0^2 \rho^2 e^{-\rho}\, d\rho$$

$$= 6\pi\left[-e^{-\rho}(\rho^2+2\rho+2)\right]_0^2 = 6\pi(2-10e^{-2}) = 12\pi(1-5e^{-2}),$$

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{\{x^2+y^2\leq 4\}} \langle (x, y, \overset{=0}{z}+x^2+y^2), (0,0,-1) \rangle \, dx\,dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{2} (-\rho^2)\cdot \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi\left[-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = -8\pi$$

e

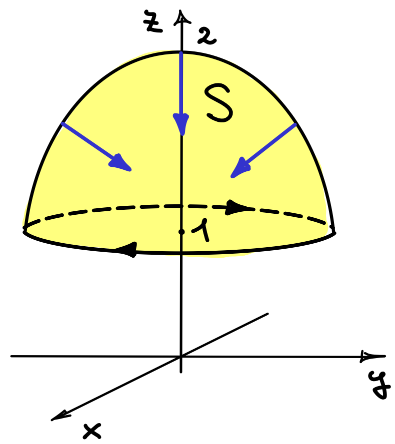
$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2e^{-2}} \langle (x, y, z+x+y^2), (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \rangle \, 2\, d\theta \cdot dz$$

$x = 2\cos\theta,\ y = 2\operatorname{sen}\theta$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2e^{-2}} (2\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta)\cdot 2\, d\theta\, dz$$

$$= 2e^{-2}\cdot 4 \cdot 2\pi = 16\pi e^{-2}.$$

$\boxed{23}$ Calcolare $\iint_S \langle \mathrm{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$ sia direttamente che usando il teorema del rotore dove $\vec{F}(x,y,z) = (4y + xz,\ e^y,\ xy + z^2)$ e
$S = \{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 + 2z = 4,\ z \geq 1\}$.
S è orientata in modo che $\vec{n} = (0,0,-1)$ in $(0,0,2)$.



Calcolo diretto:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4y+xz & e^y & xy+z^2 \end{bmatrix} = (x,\ x-y,\ -4).$$

Parametrizzazione di S:

$x^2 + 2y^2 = 4 - 2z \leq 4 - 2$

$\vec{\sigma}(x,y) = \left(x,\ y,\ 2 - \frac{x^2}{2} - y^2\right)$ con $A = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 \leq 2\}$

$\hookrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + y^2 \leq 1$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (x, 2y, 1)$ che su S induce l'orientazione tale che $\vec{n} = (0,0,1)$ in $(0,0,2)$ (opposta a quella data). Così

$$\iint_S \langle \mathrm{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = -\iint_A \langle (x,\ x-y,\ -4), (x, 2y, 1) \rangle \, dx\,dy$$

$$= -\iint_{\{x^2+2y^2 \leq 2\}} (x^2 + \underbrace{(2xy)}_{x\text{-dispari}} - 2y^2 - 4)\, dx\,dy$$

simmetrico rispetto a $x=0$

$\begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$$= -\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1} (2\rho^2\cos^2\theta - 2\rho^2\sin^2\theta - 4)\sqrt{2}\rho \, d\rho\, d\theta$$

$$= \cancel{-2\sqrt{2}\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1} + \cancel{2\sqrt{2}\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1} + 4\sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = 4\sqrt{2}\pi.$$

Per il teorema del rotore

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \overset{TR}{=} \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove l'ellisse $\gamma = \partial^+ S$ è orientata in senso orario rispetto all'asse z

$$\vec{\gamma}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \operatorname{sen} t, 1) \text{ con } t \in [2\pi, 0].$$

Così

$$= \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$$= -\int_0^{2\pi} \langle (4\overset{\operatorname{sen} t}{\overset{\shortparallel}{y}} + x\overset{\sqrt{2}\cos t}{\overset{\shortparallel}{z}}, e^{\overset{\operatorname{sen} t}{\overset{=}{y}}}, xy + z^2), \overbrace{(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \cos t, 0)}^{\vec{\gamma}'(t)} \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t - e^{\operatorname{sen} t}\cos t) \, dt$$

$$= 4\sqrt{2}\pi + \left[\operatorname{sen}^2 t\right]_0^{2\pi} - \left[e^{\operatorname{sen} t}\right]_0^{2\pi}$$

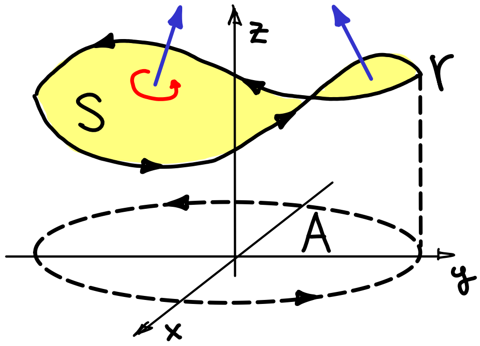
$$= 4\sqrt{2}\pi + 0 + 0 = 4\sqrt{2}\pi.$$

$\boxed{24}$ Usando il teorema del rotore calcolare

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \quad \text{con } \vec{F}(x,y,z) = (e^x + y,\ x^2 z + y^2,\ z^3 - x^2)$$

e

$$\vec{\gamma}(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t,\ 5 + 4\operatorname{sen} t \cos t) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$



La curva chiusa γ è il bordo della superficie
$S = \{(x, y, 5 + xy) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 5 + xy) \quad \text{con } A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (-y, -x, 1)$. L'orientazione di S verso l'alto è concorde con l'orientazione antioraria di γ rispetto all'asse z.

Inoltre

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^x + y & x^2 z + y^2 & z^3 - x^2 \end{bmatrix} = (-x^2, 2x, 2xz - 1).$$

Così per il teorema del rotore

$$\int_{\gamma = \partial^+ S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \overset{TR}{=} \iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$$

$$= \iint_A \langle (-x^2, 2x, 2x\overset{5+xy}{z} - 1), (-y, -x, 1) \rangle \, dx\,dy$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} (\underbrace{x^2 y}_{\text{y-disp}} - 2x^2 + \underbrace{10x}_{\text{x-disp}} + \underbrace{2x^2 y}_{\text{y-disp}} - 1) \, dx\,dy$$

simmetrico rispetto a $x=0$

$$= -2\iint_{\{x^2+y^2\leq 4\}} x^2\,dx\,dy - \iint_{\{x^2+y^2\leq 4\}} 1\,dx\,dy$$

$$= -2\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2} \rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta - 4\pi$$

$$= -2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 - 4\pi = -8\pi - 4\pi = -12\pi.$$

$\boxed{25}$ Sia $\vec{F} = \left(\dfrac{x}{1+x^2+y^2}, x^3+z, 2\right)$ e sia

$$D = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 2\}$$

con il bordo ∂D orientato verso l'esterno.
Inoltre siano le superfici:

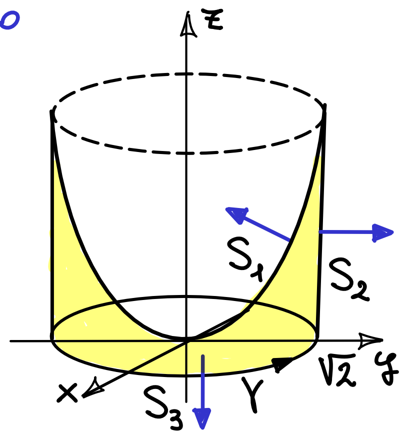
$$S_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 2\} \cap \partial D \text{ e } S_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = z\} \cap \partial D.$$

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$. (b) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \mathrm{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$.

(a) Per il teorema della divergenza

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \overset{TD}{=} \iiint_D \mathrm{div}(\vec{F})\, dx\,dy\,dz - \iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$= \iiint_D \frac{1 + \overbrace{(y^2-x^2)}^{\text{integrale} = 0 \text{ perché } D \text{ è simmetrico rispetto a } y=x}}{(1+x^2+y^2)^2}\, dx\,dy\,dz + 2|S_3|$$



$$= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 2\}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \Big[z\Big]_0^{x^2+y^2} dx\,dy + 4\pi$$

$$\overset{CP}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \rho\, d\rho\, d\theta + 4\pi = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2 \pm 1}{(1+\rho^2)^2} \rho\, d\rho + 4\pi$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2\rho}{1+\rho^2} - \frac{2\rho}{(1+\rho^2)^2} \right) d\rho + 4\pi = \pi \left[\log(1+\rho^2) + \frac{1}{1+\rho^2} \right]_0^{\sqrt{2}} + 4\pi$$

$$= \frac{10}{3}\pi + \pi \log(3).$$

(b) Per il teorema del rotore

$$\iint_{S_1\cup S_2} \langle rot(\vec{F}), d\vec{S}\rangle = \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle$$

dove γ è il bordo di $S_1\cup S_2$ con l'orientazione indotta

$$\vec{\gamma}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\,sen(t), 0) \quad \text{con } t\in[0,2\pi].$$

Così

$$= \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (\frac{\sqrt{2}\cos t}{1+2}, 2\sqrt{2}\cos^3 t, 2), (-\sqrt{2}\,sen\,t, \sqrt{2}\cos t, 0)\rangle dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \overbrace{2\cos t\,sen\,t}^{sen(2t)}\,dt + 4\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt$$

dove $\cos^4 t = (1-sen^2 t)\cos^2 t = \cos^2 t - \frac{1}{4}sen^2(2t)$

$$= 0 + 4\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt - \int_0^{2\pi} sen^2(2t)\,dt = 4\pi - \pi = 3\pi.$$

Calcolo alternativo.

$$\iint_{S_1\cup S_2}\langle rot(\vec{F}), d\vec{S}\rangle \overset{TD}{=} \iiint_D \overbrace{div(rot(\vec{F}))}^{=0}\,dx\,dy\,dz - \iint_{S_3}\langle rot(\vec{F}), d\vec{S}\rangle$$

basta la componente z

$$= -\iint_{\{x^2+y^2\le 2\}} \langle rot(\vec{F}), (0,0,-1)\rangle\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2\le 2\}} (3x^2 + \underbrace{(\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2})}_{x\text{-dispari}})\,dx\,dy$$

$$\overset{CP}{=} 3\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = 3\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 3\pi.$$