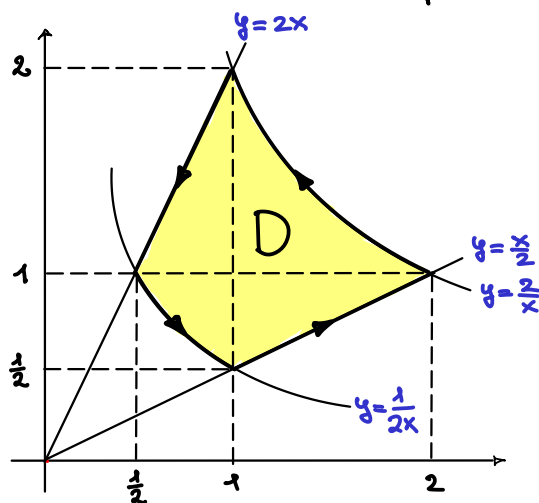


ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 41

ESERCIZI DI RIEPILOGO - PARTE 4

16 Siano $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{2x - y(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2y + x(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$ e
 $D = \{(x,y) : x \leq 2y \leq 4x, 1 \leq 2xy \leq 4, x > 0\}$.

Disegnare D e poi calcolare $\int \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\gamma = \partial D$ è una curva percorsa in senso antiorario.



Si nota che $\vec{F} = \nabla U + (-y, x)$
 dove $U(x,y) = -\frac{1}{x^2 + y^2}$ e quindi

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} = 2$$

Allora applicando la formula di Gauss-Green si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma=\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &\stackrel{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{2x}}^{2x} dy \right) dx + 2 \int_1^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} dy \right) dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2x - \frac{1}{2x} \right) dx + 2 \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \left[2x^2 - \log x \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[4 \log x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \cancel{\frac{3}{2}} - \log 2 + 4 \log 2 - \cancel{\frac{3}{2}} = 3 \log 2 \end{aligned}$$

In alternativa si può fare un cambio di variabili in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = y/x \\ v = xy \end{cases} &\rightarrow \Phi: \begin{cases} x = \sqrt{v/u} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases} \rightarrow |\det(J_\Phi(u,v))| = \frac{1}{2u} > 0 \text{ in } [\frac{1}{2}, 2]^2 \\ \iint_D 2 dx dy &= \iint_{[\frac{1}{2}, 2]^2} \frac{2}{2u} du dv = \left(2 - \frac{1}{2} \right) \left[\log u \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2} \log 4 = 3 \log 2. \end{aligned}$$

17 Verificare che

$$\vec{F}(x,y,z) = (\log y + \sqrt{\frac{y}{x}} + 2x, \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x}{y}} + 3y^2, \log z)$$

è irrotazionale in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$?

Nel caso determinare una funzione potenziale.

$$\text{Si ha che } \text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$

$$= (0, 0, \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (\frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}})) = (0, 0, 0).$$

Dato che $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ è connesso e anche semplicemente connesso e quindi $\vec{F}$ è conservativo.

Calcolo del potenziale $U(x,y,z)$:

$$U = \int (\log y + \sqrt{\frac{y}{x}} + 2x) dx = x \log y + \sqrt{y} \cdot 2\sqrt{x} + x^2 + C(y,z).$$

Allora

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{y} + \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + \frac{\partial C}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x}{y}} + 3y^2 \iff \frac{\partial C}{\partial y} = 3y^2$$

$$\text{e } \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial z} \stackrel{?}{=} \log z.$$

Quindi

$$C(y,z) = \int 3y^2 dy = y^3 + C_2(z)$$

e

$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial C_2}{\partial z} \stackrel{?}{=} \log z \implies C_2(z) = \int \log z dz = z \log z - z + C_3.$$

Si conclude così che per $x,y,z > 0$:

$$U(x,y,z) = x \log y + 2\sqrt{xy} + x^2 + y^3 + z \log z - z + C_3.$$

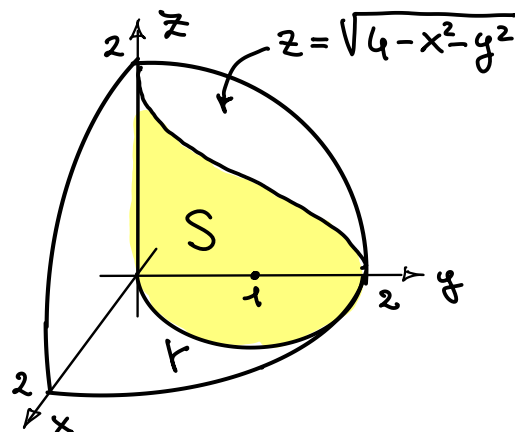
18 Calcolare l'area della superficie

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 = 2y\}.$$

$\hookrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$

S è la parte del cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ contenuta nella sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Dato che S è simmetrica rispetto ai piani $x=0$ e $z=0$ basta calcolare 4 volte l'area della parte di S contenuta nel primo ottante



$$|S| = 4 \int_Y f \, ds$$

dove $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, 1 + \sin t)$ con $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

e $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Così $\|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$ e

$$|S| = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - \cos^2 t - (1 + \sin t)^2} \, dt = 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin t} \, dt$$

$\hookrightarrow 2 - 2\sin t$ $\hookrightarrow \frac{\sqrt{1+\sin t}}{\sqrt{1+\sin t}}$

$$= 4\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \sin t}} \, dt = 4\sqrt{2} \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = 4\sqrt{2} [2\sqrt{u}]_0^2 = 16.$$

$u = 1 + \sin t$

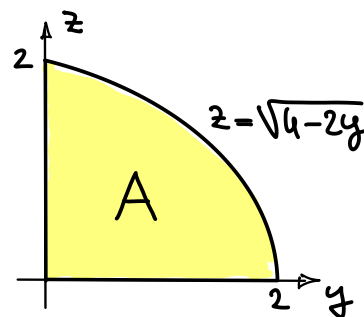
Calcolo alternativo: consideriamo la parte di S contenuta nel primo ottante come il grafico di $x = f(y, z)$ con $(y, z) \in A$ ossia la proiezione di tale parte di S sul piano $x=0$.

Abbiamo che

$$x^2 + y^2 = 2y \quad x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{2y - y^2} = f(y, z).$$

Inoltre

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases} \xrightarrow{\text{elimino } x} \begin{matrix} z \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow 2y + z^2 \leq 4 \Rightarrow A = \{(y, z) : y \in [0, 2], 0 \leq z \leq \sqrt{4 - 2y}\}.$$



Parametrizzazione della superficie:

$$\vec{\sigma}(y, z) = (f(y, z), y, z) \text{ con } (y, z) \in A.$$

Elemento infinitesimale d'area:

$$dS = \sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2} dy dz = \sqrt{1 + \left(\frac{2(1-y)}{2\sqrt{2y-y^2}}\right)^2} dy dz = \frac{dy dz}{\sqrt{2y-y^2}}.$$

Così

$$\begin{aligned} |S| &= 4 \iint_A \frac{dy dz}{\sqrt{2y-y^2}} = 4 \int_{y=0}^2 \frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{4-2y}} dz = 4 \int_0^2 \frac{\sqrt{4-2y}}{\sqrt{2y-y^2}} dy \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^2 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4\sqrt{2} [2\sqrt{y}]_0^2 = 16. \end{aligned}$$

Calcolo alternativo 2.

Parametrizzazione della superficie:

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = (2\sin\theta\cos\theta, 2\sin^2\theta, z) \quad \sqrt{4-x^2-y^2}$$

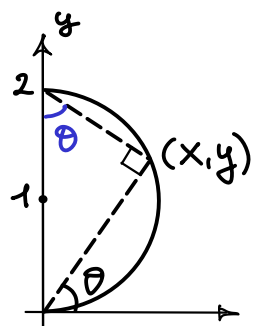
$$\text{con } A = \{(\theta, z) : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], z \in [0, 2\cos\theta]\}$$

Elemento infinitesimale d'area:

$$dS = \|\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_z\| d\theta dz = \dots = \|(2\sin 2\theta, -2\cos 2\theta, 0)\| = 2.$$

Così

$$|S| = 4 \iint_A 2 d\theta dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta d\theta = 16 [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 16.$$



$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \cdot \cos\theta \\ y = 2\sin\theta \cdot \sin\theta \end{cases}$$

19 Calcolare $\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} dS$ con

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \text{ dove } R > 0, d \geq 0 \text{ e } d \neq R.$$

Se $d=0$ allora $\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS = \frac{|S|}{R} = 4\pi R$

Se $d > 0$ e $d \neq R$ allora

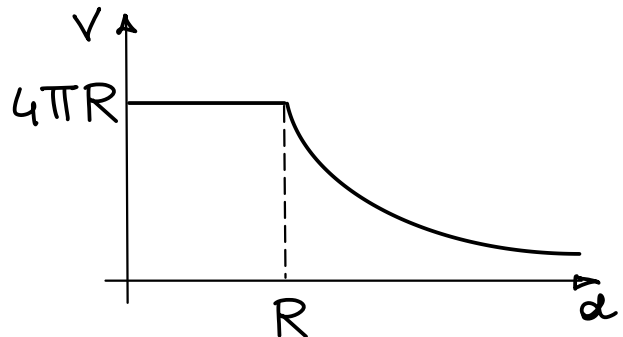
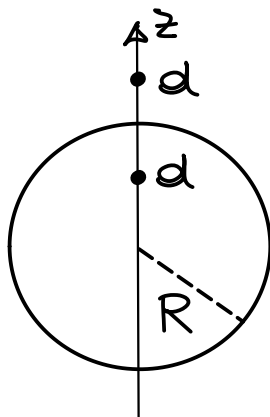
$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} dS \stackrel{CS}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rd \cos \varphi + d^2}} R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$\hookrightarrow x^2+y^2+z^2-2dz+d^2$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rd \cos \varphi + d^2}} R^2 \sin \varphi d\varphi$$

$$\begin{cases} u = R^2 - 2Rd \cos \varphi + d^2 \\ du = 2Rd \sin \varphi d\varphi \end{cases} \Rightarrow 2\pi \int_{(R-d)^2}^{(R+d)^2} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{R}{2d} du = \frac{2\pi R}{d} \left[\sqrt{u} \right]_{(R-d)^2}^{(R+d)^2}$$

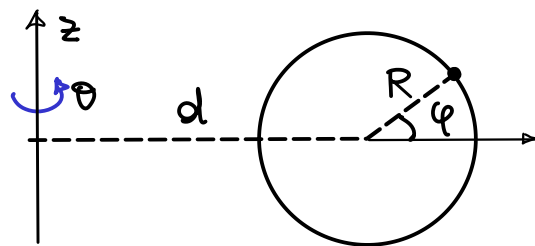
$$= \frac{2\pi R}{d} (|R+d| - |R-d|) = \begin{cases} 4\pi R & \text{se } 0 < d < R \\ \frac{4\pi R^2}{d} & \text{se } R < d \end{cases} = V(d)$$



20 Calcolare il rapporto I/M del toro

$$S = \left\{ ((d+R\cos\varphi)\cos\theta, (d+R\cos\varphi)\sin\theta, R\sin\varphi) : (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi]^2 \right\}$$

con $d > R > 0$ rispetto all'asse z .



Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = ((d+R\cos\varphi)\cos\theta, (d+R\cos\varphi)\sin\theta, R\sin\varphi)$$

con $A = [0, 2\pi]^2$. Determiniamo $\|\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_\varphi\|$:

$$\vec{\sigma}_\theta = ((d+R\cos\varphi)(-\sin\theta), (d+R\cos\varphi)\cos\theta, 0),$$

$$\vec{\sigma}_\varphi = (-R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi).$$

Così

$$\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_\varphi = (d+R\cos\varphi)R \cdot \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= (d+R\cos\varphi) \cdot R (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$$

da cui $\|\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_\varphi\| = (d+R\cos\varphi) \cdot R.$

$d+R\cos\varphi > 0$
perché $d > R > 0$

Allora

$$|S| = \iint_{[0, 2\pi]^2} (d+R\cos\varphi) \cdot R \, d\varphi \, d\theta = (2\pi)^2 \cdot d \cdot R$$

e infine

$$\frac{I}{M} = \frac{1}{|S|} \iint_S (x^2 + y^2) \, dS = \frac{1}{4\pi^2 d R} \iint_{[0, 2\pi]^2} (d+R\cos\varphi)^3 R \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{4\pi^2 d} \int_0^{2\pi} (d^3 + 3d^2 R \cos\varphi + 3d R^2 \cos^2\varphi + R^3 \cos^3\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi d} (d^3 \cdot 2\pi + 0 + 3d R^2 \pi + 0) = d^2 + \frac{3}{2} R^2.$$