ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 39

ESERCIZI DI RIEPILOGO - PARTE 2

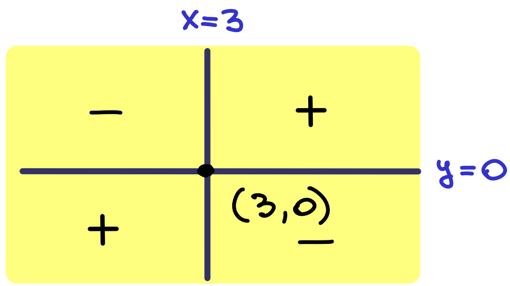
$\boxed{6}$ Sia $f(x,y)=(x-3)y\,e^{y-x}$.

Determinare tutti i punti stazionari e la loro natura.

f è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$?

f è inferiormente limitata in $\mathbb{R}^2$?

f è C^∞ in $\mathbb{R}^2$ con segno indicato in figura



Le derivate parziali sono:

$$f_x(x,y)=y\,e^{y-x}+(x-3)y(-e^{y-x})=e^{y-x}y(4-x)$$

$$f_y(x,y)=(x-3)e^{y-x}+(x-3)y\,e^{y-x}=e^{y-x}(x-3)(1+y).$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases}\cancel{e^{y-x}}\,y(4-x)=0\\ \cancel{e^{y-x}}(x-3)(1+y)=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases} \cup \begin{cases}x=4\\ y=-1\end{cases}$$

$(3,0)$ è un punto di SELLA perché $f(0,0)=0$ e f cambia segno in ogni intorno di $(3,0)$.

Per il punto $(4,-1)$ calcoliamo H_f:

$$f_{xx}=-e^{y-x}y(4-x)-e^{y-x}y=e^{y-x}y(x-5)$$

$$f_{xy}=f_{yx}=e^{y-x}y(4-x)+e^{y-x}(4-x)=e^{y-x}(4-x)(1+y)$$

$$f_{yy}=e^{y-x}(x-3)(1+y)+e^{y-x}(x-3)=e^{y-x}(x-3)(2+y)$$

Così

autovalori > 0

$$H_f(4,-1)=e^{-5}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow (4,-1) \text{ è un punto di MINIMO RELATIVO}$$

f non è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$ perché

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,t)=\lim_{t\to+\infty}(t-3)t=+\infty.$$

f non è inferiormente limitata in $\mathbb{R}^2$ perché

$$\lim_{t\to+\infty} f(0,t)=\lim_{t\to+\infty}-3te^{t}=-\infty.$$

$\boxed{7}$ Sia $f(x,y)=3xy^2-x^3$. Determinare

1) i punti stazionari di f e la loro natura,

2) i punti stazionari vincolati di f in
$$\Gamma=\{(x,y):\ x^2+2y^2=1\},$$

3) il valore massimo e il valore minimo di f in
$$D=\{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+2y^2\leq 1\}.$$

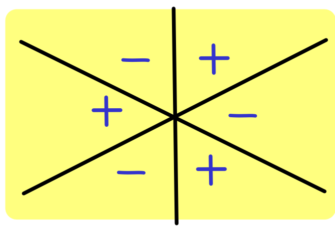
1) $\nabla f(x,y)=(3y^2-3x^2,\ 6xy)$

$$\begin{cases}3y^2-3x^2=0\\ 6xy=0 \rightarrow x=0 \vee y=0\end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ unico punto stazionario.}$$

Si noti che $H_f(0,0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Dato che $f(0,0)=0$ discutiamo il segno di f in un intorno di $(0,0)$:

$$f(x,y)=x(3y^2-x^2)=x(\sqrt{3}y-x)(\sqrt{3}y+x)$$

$(0,0)$ è un punto di SELLA



2) Sia $g(x,y)=x^2+2y^2-1=0$ allora in Γ

$$\nabla g(x,y)=(2x,4y)=(0,0)$$

e tutti i punti di Γ sono regolari.

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\ g=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}3y^2-3x^2=\lambda 2x\\ 6xy=\lambda 4y \to y=0 \ \vee\ \lambda=\frac{3x}{2}\\ x^2+2y^2=1\end{cases}$$

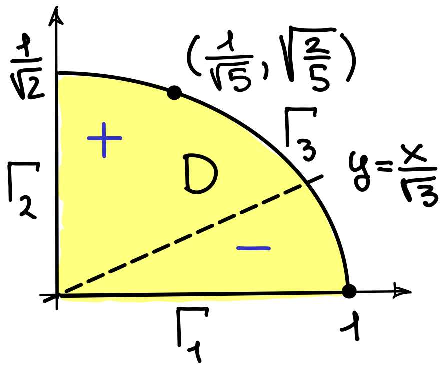
$$\begin{cases}y=0\\ -3x^2=\lambda 2x\\ x^2=1\end{cases} \cup \begin{cases}\lambda=3x/2\\ 3y^2-3x^2=3x^2 \to y^2=2x^2\\ x^2+2y^2=1 \to x^2+4x^2=1,\ 5x^2=1\end{cases}$$

$(1,0),(-1,0)$

punti stazionari vincolati $\to \left(\frac{1}{\sqrt5},\pm\sqrt{\frac{2}{5}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt5},\pm\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

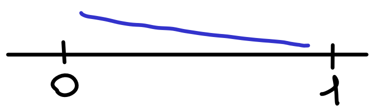
3) D è compatto e $f\in C^\infty(D)$.

Per 1), D non contiene punti stazionari interni e dunque i punti di massimo/minimo di f in D stanno sul bordo $\partial D=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ dove



$$\Gamma_1=\{(x,0):\ x\in[0,1]\}$$

$f(x,0)=-x^3$



$\boxed{f(0,0)=0,\ f(1,0)=-1}$

$\Gamma_2=\left\{(0,y):\ y\in\left[0,\frac{1}{\sqrt2}\right]\right\}$ con $\boxed{f(0,y)=0}$

e $\Gamma_3=\{(x,y):\ x^2+2y^2=1,\ 0<x<1,\ y>0\}$.

Per 2) Γ_3 contiene un unico punto stazionario vincolato ossia $\left(\frac{1}{\sqrt5}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ e

$$\boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt5}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt5}\left(3\cdot\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt5}}$$

Confrontando i valori trovati segue che

$$\max_D f(x,y) = \frac{1}{\sqrt5} \quad e \quad \min_D f(x,y) = -1.$$

$\boxed{8}$ Sia $f(x,y) = e^{xy}$. Determinare

1) i punti stazionari di f e la loro natura,

2) il valore massimo e il valore minimo di f in
$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le x + \sqrt2,\ x^2 + 4y^2 \le 8\}.$$

1) $\nabla f(x,y) = (y e^{xy}, x e^{xy})$

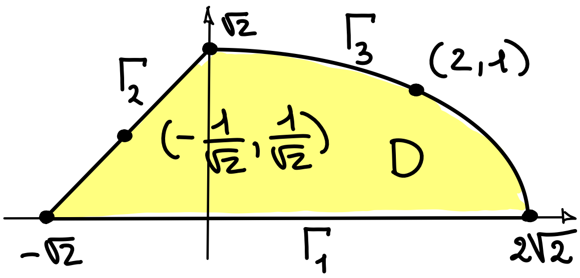
$$\begin{cases} y e^{xy} = 0 \\ x e^{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ unico punto stazionario}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} & e^{xy} + xy e^{xy} \\ e^{xy} + xy e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det H_f = -1 < 0$

$(0,0)$ è un punto di SELLA.

2) $D = \left\{(x,y) : 0 \le y \le x + \sqrt2 \quad \frac{x^2}{(2\sqrt2)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt2)^2} \le 1\right\}.$



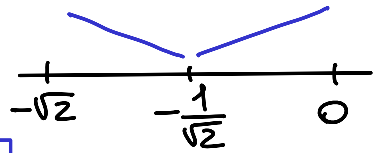
D è compatto e $f \in C^\infty(D)$.
Per 1), D non contiene punti stazionari interni e dunque i punti di massimo/minimo

di f in D stanno sul bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ dove

$\Gamma_1 = \{(x,0) : x \in [-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]\}$ $\quad \boxed{f(x,0)=1}$

$\Gamma_2 = \{(x, x+\sqrt{2}) : x \in (-\sqrt{2}, 0]\}$

$$f(x, x+\sqrt{2}) = e^{x(x+\sqrt{2})}$$



con $\boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}\ ,\ f(0,\sqrt{2}) = 1}$

e $\Gamma_3 = \{(x,y) : x^2+4y^2=8,\ x>0,\ y>0\}$

Sia $g(x,y) = x^2+4y^2-8$ allora in Γ_3

$$\nabla g(x,y) = (2x, 8y) \neq (0,0)$$

e tutti i punti di Γ_3 sono regolari

Moltiplicatore di Lagrange:

$$\begin{cases} \overset{>0}{y} e^{xy} = \overset{\neq 0}{\lambda} 2x & \cdot x \\ x e^{xy} = \lambda 8y & \cdot y \\ x^2+4y^2 = 8 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \lambda 2x^2 = \lambda 8 y^2 \\ 2\lambda(x^2-4y^2)=0 \\ \quad x^2 = 4y^2 \to x = \pm 2y \end{array}$$

$$\begin{cases} x = \pm 2y \\ (\pm 2y)^2 + 4y^2 = 8 \end{cases} \to y^2 = 1 \to \begin{array}{l} x = \cancel{\pm}\, 2 \\ y = \cancel{\pm}\, 1 \end{array} \quad (2,1) \in \Gamma_3$$

$(2,1)$ è l'unico punto stazionario vincolato in Γ_3

$$\boxed{f(2,1) = e^2}$$

Confrontando i valori trovati segue che

$$\max_D f(x,y) = e^2 \quad e \quad \min_D f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$\boxed{9}$ Verificare che l'equazione $e^y = 2x + (1+xy)e^x$ definisce implicitamente due funzioni

$$y = \varphi(x) \quad e \quad x = \psi(y)$$

in un intorno di $(0,0)$ e determinare il polinomio di Taylor di φ in $x_0 = 0$ di ordine 2.

Quanto vale $\lim\limits_{t\to 0} (1+\varphi(t))^{1/\psi(t)}$?

Sia $f(x,y) = e^y - 2x - (1+xy)e^x$ allora $f(0,0) = 0$ e per il teorema delle funzioni implicite (TFI)

$$f_y(0,0) \neq 0 \Rightarrow \exists\, y = \varphi(x) \quad e \quad f_x(0,0) \neq 0 \Rightarrow \exists\, x = \psi(y).$$

$$f_x(x,y) = -2 - ye^x - (1+xy)e^x \Rightarrow f_x(0,0) = -2-1 = -3 \neq 0$$

$$f_y(x,y) = e^y - xe^x \Rightarrow f_y(0,0) = 1 \neq 0$$

Abbiamo che $\varphi(0) = 0$ e ancora per il TFI

$$\varphi'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = 3.$$

Inoltre derivando due volte $e^\varphi = 2x + (1+x\varphi)e^x$ si ha

$$e^\varphi \cdot \varphi' = 2 + (\varphi + x\varphi')e^x + (1+x\varphi)e^x$$

e

$$e^\varphi \cdot (\varphi')^2 + e^\varphi \cdot \varphi'' = (2\varphi' + x\varphi'')e^x + 2(\varphi + x\varphi')e^x + (1+x\varphi)e^x$$

$x=0$ $$(3)^2 + \varphi''(0) = (2\cdot 3 + 0) + 0 + 1 \Rightarrow \varphi''(0) = 7 - 9 = -2$$

e quindi il polinomio di Taylor T_2 di φ in 0 è

$$T_2(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 = 3x - x^2.$$

Infine, per $t \to 0$ si ha

$$\varphi(t) = 3t + o(t) \quad e \quad \psi(t) = \frac{t}{3} + o(t)$$

$$\psi'(0) = -\frac{f_y(0,0)}{f_x(0,0)} = \frac{1}{3}$$

Così

$$(1+\varphi(t))^{\frac{1}{\psi(t)}} = \exp\left(\frac{\log(1+\varphi(t))}{\psi(t)}\right)$$

$$\overset{\log(1+x)\sim x}{=} \exp\left(\frac{3t+o(t)}{\frac{t}{3}+o(t)}\right) = \exp(9+o(1)) \to e^9.$$

$\boxed{10}$ Verificare che il sistema $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+(z-2)^2=1 \end{cases}$ definisce implicitamente due funzioni

$$y=\varphi(x) \quad e \quad z=\psi(x)$$

in un intorno di $(0,3,3)$ e determinare il polinomio di Taylor di φ e quello di ψ in $x_0=0$ di ordine 2.

Siano

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2 \quad e \quad g(x,y,z)=x^2+(z-2)^2-1.$$

La matrice jacobiana rispetto a y e z è

$$J=\begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -2z \\ 0 & 2(z-2) \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J)=4y(z-2).$$

Per $(x,y,z)=(0,3,3)$ si ha che $\det(J)=12\neq 0$.

Allora per TFI esistono φ,ψ in un intorno di 0 tali che $(x,\varphi(x),\psi(x))$ soddisfa il sistema dato.

Determiniamo i polinomi di Taylor di φ e ψ in 0 di ordine 2:

$$\begin{cases} x^2+\varphi^2=\psi^2 \\ x^2+(\psi-2)^2=1 \end{cases} \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2x+2\varphi\cdot\varphi'=2\psi\cdot\psi' \\ 2x+2(\psi-2)\cdot\psi'=0 \end{cases} \quad (*)$$

Per $x=0$ si ha

$$\begin{cases} 0+2\cdot 3\varphi'=2\cdot 3\psi' \\ 0+2(3-2)\psi'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0)=0 \\ \psi'(0)=0. \end{cases}$$

Derivando ulteriormente (*) si ottiene

$$\begin{cases} 2 + 2\varphi'^2 + 2\varphi\varphi'' = 2\psi'^2 + 2\psi\cdot\psi'' \\ 2 + 2\psi'^2 + 2(\psi - 2)\psi'' = 0 \end{cases}$$

Per $x = 0$ si ha

$$\begin{cases} 2 + 0 + 6\varphi'' = 0 + 6\psi'' \\ 2 + 0 + 2(3-2)\psi'' = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \psi''(0) = -1 \\ \varphi''(0) = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Quindi i polinomi di Taylor richiesti sono

$$\varphi: \quad T_2(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 = 3 - \frac{2}{3}x^2$$

$$\psi: \quad T_2(x) = \psi(0) + \psi'(0)x + \frac{1}{2}\psi''(0)x^2 = 3 - \frac{x^2}{2}.$$