ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 35

TEOREMA DEL ROTORE

Il teorema del rotore mette in relazione integrali di flusso e integrali curvilinei di seconda specie.

TEOREMA (DEL ROTORE O DI STOKES)

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare a pezzi e orientata e sia $\vec{F}$ un campo vettoriale C^1 in S. Allora

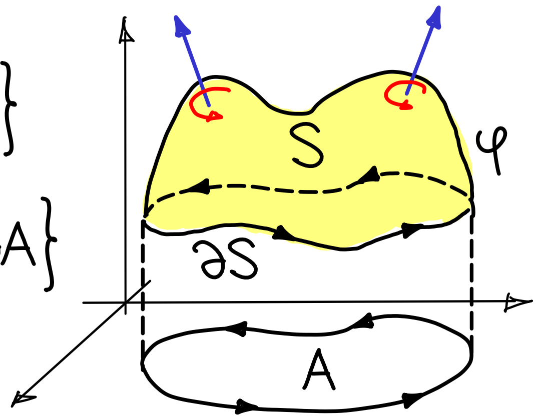
$$\iint_S \langle rot(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove con $\partial^+ S$ si intende che le curve chiuse date dal bordo di S hanno l'orientazione positiva indotta dall'orientazione di S.

dim. Consideriamo prima il caso in cui S sia data da un solo "pezzo". Per semplicità supponiamo che S sia una superficie cartesiana e che ∂S sia il sostegno di una curva:

$$S = \{(x,y,z) : z = \varphi(x,y), (x,y) \in A\}$$

$$\partial S = \{(x,y,z) : z = \varphi(x,y), (x,y) \in \partial A\}$$



dove $\varphi \in C^2(A)$ e $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme semplice.

Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,\varphi(x,y)) \text{ con } (x,y)\in A.$$

Parametrizzazione di $\partial^+ S$:

$$\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t),\varphi(x(t),y(t))) \text{ con } t\in[a,b]$$

dove $[a,b]\ni t\to(x(t),y(t))$ è una parametrizzazione di ∂^+A. Partiamo dall'integrale curvilineo e arriviamo al flusso:

$\frac{d}{dt}(\varphi(x(t),y(t)))$

$$\int_{\partial^+ S}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_a^b\langle(F_1,F_2,F_3),(x',y',(\varphi_x\cdot x'+\varphi_y\cdot y'))\rangle dt$$

$F_i=F_i(x(t),y(t),\varphi(x(t),y(t)))$ per $i=1,2,3$

$$=\int_a^b\langle(F_1+F_3\varphi_x,F_2+F_3\varphi_y),(x',y')\rangle dt$$

$$=\int_{\partial^+A}\langle(F_1+F_3\varphi_x,F_2+F_3\varphi_y,d\vec{s}\rangle$$

$$\overset{GG}{=}\iint_A\left(\frac{\partial}{\partial x}(F_2+F_3\varphi_y)-\frac{\partial}{\partial y}(F_1+F_3\varphi_x)\right)dx\,dy$$

$F_i=F_i(x,y,\varphi(x,y))$ per $i=1,2,3$

$$=\iint_A\Bigg(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot\varphi_x+\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\cdot\varphi_x}\right)\varphi_y+\cancel{F_3\cdot\varphi_{yx}}$$
$$-\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot\varphi_y+\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}+\cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\cdot\varphi_y}\right)\varphi_x+\cancel{F_3\cdot\varphi_{xy}}\right)\Bigg)dx\,dy$$

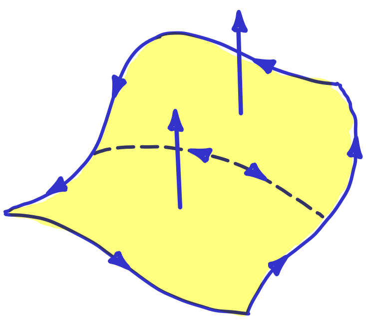
$$=\iint_A\left\langle\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right),(-\varphi_x,-\varphi_y,1)\right\rangle dx\,dy$$

$$=\iint_S\langle \mathrm{rot}(\vec{F}),d\vec{S}\rangle.\qquad d\vec{S}=(-\varphi_x,-\varphi_y,1)\,dx\,dy$$

Per estendere quanto dimostrato a una superficie regolare a pezzi e orientata $S=S_1\cup\ldots\cup S_N$, con $\partial^+S=\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_M$ basta osservare che

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec F), d\vec S\rangle \underset{S=S_1\cup\ldots\cup S_N}{=} \sum_{i=1}^{N}\iint_{S_i}\langle \operatorname{rot}(\vec F), d\vec S\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\int_{\partial^+S_i}\langle \vec F, d\vec s\rangle = \sum_{j=1}^{M}\int_{\gamma_j}\langle \vec F, d\vec s\rangle \overset{\partial^+S=\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_M}{=} \int_{\partial^+S_i}\langle \vec F, d\vec s\rangle.$$



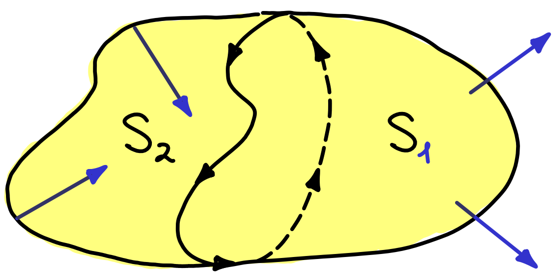
gli integrali curvilinei lungo le curve in comune vengono calcolati per entrambe le direzioni e il loro contributo totale è nullo

$\square$

OSSERVAZIONE

Se S_1 e S_2 sono due superfici orientate tali che $\partial^+S_1=\partial^+S_2$ con la stessa orientazione indotta allora i flussi di $\operatorname{rot}(\vec F)$ attraverso S_1 e S_2 sono uguali:

$$\iint_{S_1}\langle \operatorname{rot}(\vec F), d\vec S\rangle \overset{TR}{=} \int_{\partial^+S_1=\partial^+S_2}\langle \vec F, d\vec s\rangle \overset{TR}{=} \iint_{S_2}\langle \operatorname{rot}(\vec F), d\vec S\rangle$$



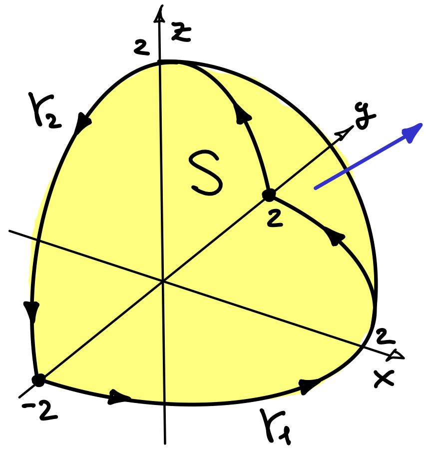
$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Calcolare $\displaystyle\iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$

dove $\vec{F}=(x^2, z, x+3y)$ e

$S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=4, x\geq 0, z\geq 0\}$

orientata verso l'alto.



1) Calcolo diretto.

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z & x+3y \end{bmatrix} = (3-1, -1, 0) = (2, -1, 0)$$

Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = 2(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi) = 2\vec{n} \quad \text{versore esterno}$$

con $(\theta,\varphi)\in A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Allora

$$\vec{\sigma_\theta} \times \vec{\sigma_\varphi} = -\overset{=R^2}{4} \operatorname{sen}\varphi\, \vec{n} \quad \text{opposta all'orientazione data}$$

e quindi

$$\iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (2,-1,0), 4\operatorname{sen}\varphi\, \vec{n} \rangle \, d\theta\, d\varphi$$

$$= 4 \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{2\cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi}_{\theta\text{-pari}} - \underbrace{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\varphi}_{\theta\text{-dispari}}) \, d\theta\, d\varphi$$

$$= 16 \left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi = 16 \cdot \frac{\pi}{4} = 4\pi.$$

2) Calcolo usando il teorema del rotore.

Il bordo di S è costituito dalle semicirconferenze γ_1 e γ_2 con l'orientazione indicata in figura.

Così

$$\vec{\gamma}_1(t) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\, t, 0) \text{ con } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

$$\vec{\gamma}_2(t) = (0, 2\cos t, 2\,\text{sen}\, t) \text{ con } t \in [0, \pi].$$

Allora

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \overset{\text{TR}}{=} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

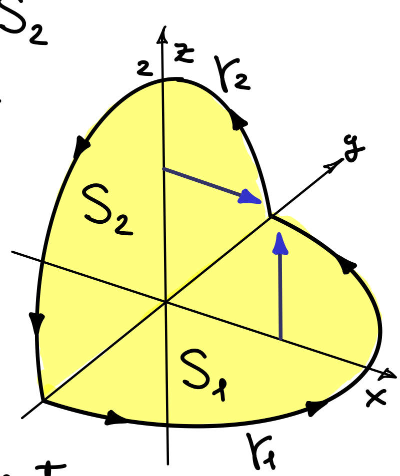
$$\vec{F} = \underbrace{(x^2, 0, 0)}_{\text{conservativo}} + (0, z, x+3y)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \langle (0, \overset{0}{\overset{\shortparallel}{z}}, x+3y), (-2\,\text{sen}\, t, 2\cos t, 0) \rangle \, dt$$

$$+ \int_0^{\pi} \langle (0, z, \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x}}+3y), (0, -2\,\text{sen}\, t, 2\cos t) \rangle \, dt$$

$$= 0 + \int_0^{\pi} (-4\,\text{sen}^2 t + 12\cos^2 t) \, dt = -4\frac{\pi}{2} + 12\frac{\pi}{2} = 4\pi.$$

3) Consideriamo la superficie $S_1 \cup S_2$ orientata come in figura che ha lo stesso bordo di S.



$$S_1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\},$$

$$S_2 = \{(0, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$

Allora per l'osservazione precedente

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_{S_1 \cup S_2} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$$

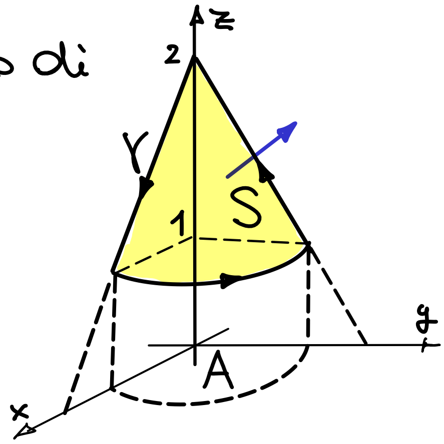
$$= \iint_{S_1} \underbrace{\langle (2, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle}_{=0} \, dS + \iint_{S_2} \underbrace{\langle (2, -1, 0), (1, 0, 0) \rangle}_{=2} \, dS$$

$$= 0 + 2|S_2| = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 4\pi.$$

• Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle$ dove $\vec{F} = (1/z, 3x^2-4z, z^2)$ e γ è la curva chiusa data dal bordo di

$$S = \left\{(x,y,z) : z = 2-\sqrt{x^2+y^2},\ \begin{matrix} x,y \geq 0 \\ z \geq 1 \end{matrix}\right\}$$

L'orientazione di γ è quella indicata in figura.



In alternativa al calcolo diretto applichiamo il teorema del rotore. S è parametrizzata da $\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 2-\sqrt{x^2+y^2})$ con $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, x,y \geq 0\}$.

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \underbrace{1}_{>0}\right)$$ compatibile con l'orientazione di γ

Inoltre

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1/z & 3x^2-4z & z^2 \end{bmatrix} = \left(4, -\frac{1}{z^2}, 6x\right).$$

Così

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle \overset{TR}{=} \iint_S \langle \mathrm{rot}(\vec{F}), d\vec{S}\rangle = \iint_A \left(\frac{4x - \frac{y}{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} + 6x\right) dx\,dy$$

$$\overset{CP}{=} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(4\cos\theta - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{(2-\rho)^2} + 6\rho\cos\theta\right) d\theta\, \rho\, d\rho$$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta = 1$$

$$= \int_0^1 \left(4\rho - \overbrace{\left(\frac{\rho}{(2-\rho)^2}\right)}^{\frac{1}{\rho-2} + \frac{2}{(\rho-2)^2}} + 6\rho^2\right) d\rho$$

$$= \left[2\rho^2 - \log|\rho-2| + \frac{2}{\rho-2} + 2\rho^3\right]_0^1 = 3 + \log(2).$$