ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 34

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Prima di vedere l'enunciato è necessario introdurre ancora qualche definizione.

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice Z-SEMPLICE se esistono delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(A)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ insieme semplice tali che

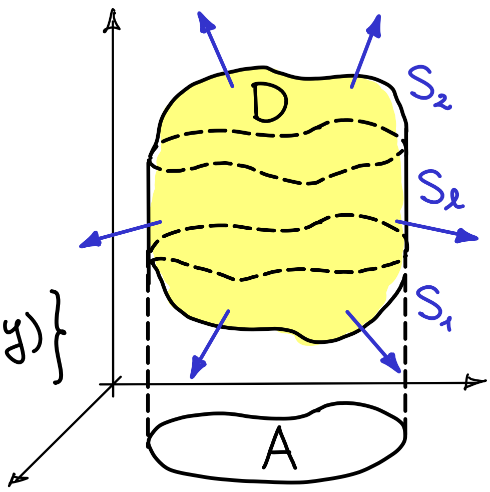
$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in A,\ \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$$

e $\partial D = S_1 \cup S_e \cup S_2$ è una superficie regolare a pezzi, chiusa e orientabile

$S_1 = \{(x,y,\varphi_1(x,y)) : (x,y) \in A\}$ grafico di φ_1

$S_2 = \{(x,y,\varphi_2(x,y)) : (x,y) \in A\}$ grafico di φ_2

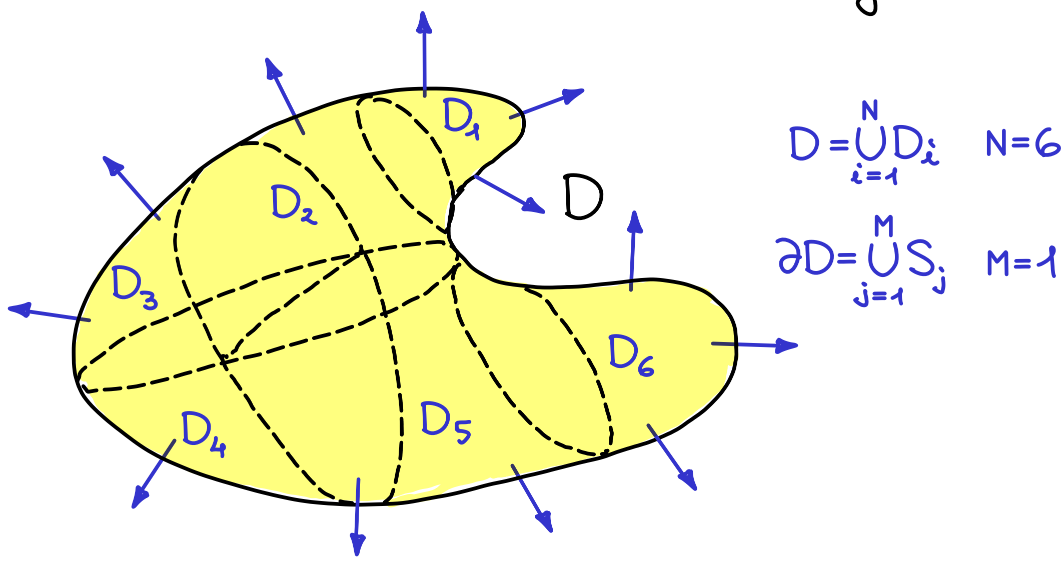
$S_e = \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial A, \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$
superficie laterale di D



Insiemi X-SEMPLICE e y-SEMPLICE hanno definizioni analoghe.

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice SEMPLICE se è semplice rispetto a tutti e tre gli assi x, y e z.

$D \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice S-DECOMPONIBILE se $D = D_1 \cup \dots \cup D_N$ con $D_1, \dots, D_N$ insiemi semplici con le parti interne a due a due disgiunte e $\partial D = S_1 \cup \ldots \cup S_M$ con $S_1, \ldots, S_M$ sostegni di superfici regolari a pezzi, chiuse, orientabili e a due a due disgiunte.



Il teorema della divergenza mette in relazione integrali tripli e integrali di flusso.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DELLA DIVERGENZA O DI GAUSS)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme s-decomponibile e sia $\vec{F}$ un campo vettoriale C^1 in D. Allora

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

flusso uscente da D

dove con $\partial^+ D$ si intende che la superficie chiusa data dal bordo di D è orientata verso l'esterno.

dim. La dimostrazione è strutturata in modo simile a quella della formula di GG.

1) Se D è z-semplice allora

$$\iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial^+ D} \langle (0,0,F_3), d\vec{S}\rangle .$$

Per quanto riguarda l'integrale triplo

$$\iiint_D \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left(\int_{z=\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dz \right) dx\,dy$$

$$\overset{TFCI}{=} \iint_A \Big[F_3(x,y,z) \Big]_{z=\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}$$

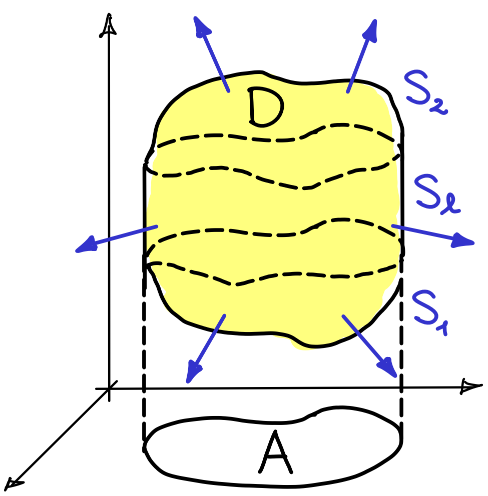
$$= \iint_A \Big(F_3(x,y,\varphi_2(x,y)) - F_3(x,y,\varphi_1(x,y)) \Big)\,dx\,dy \quad (*).$$

Per il flusso invece osserviamo che

per S_2: $\vec{\sigma}_{2x} \times \vec{\sigma}_{2y} = \left(-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \underbrace{1}_{>0} \right)$ verso l'alto

per S_ℓ: $\vec{n} \perp (0,0,1)$ ortogonale all'asse z

per S_1: $\vec{\sigma}_{1x} \times \vec{\sigma}_{1y} = \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \underbrace{1}_{>0} \right)$ verso l'alto



dove sono state usate le parametrizzazioni

$$\vec{\sigma}_2(x,y) = (x,y,\varphi_2(x,y))$$

$$\vec{\sigma}_1(x,y) = (x,y,\varphi_1(x,y))$$

con $(x,y) \in A$.

Così

$$\iint_{\partial^+ D} \langle (0,0,F_3), d\vec{S} \rangle = \iint_{S_1 \cup S_\ell \cup S_2} \langle (0,0,F_3), d\vec{S} \rangle$$

$d\vec{S} \perp (0,0,F_3)$ in S_ℓ

$$= \underset{\text{opposta}}{-} \iint_A \langle (0,0,F_3(\vec{\sigma}_1)), (-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, 1) \rangle dx dy + 0$$

$$+ \iint_A \langle (0,0,F_3(\vec{\sigma}_2)), (-\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, 1) \rangle dx dy$$

$$= -\iint_A F_3(x,y,\varphi_1(x,y)) dx dy + \iint_A F_3(x,y,\varphi_2(x,y)) dx dy = (*) .$$

2) Se D è y-semplice allora

$$\iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial^+ D} \langle (0,F_2,0), d\vec{S} \rangle .$$

e se D è x-semplice allora

$$\iiint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial^+ D} \langle (F_1,0,0), d\vec{S} \rangle .$$

Si dimostrano in modo simile ad 1).

3) Se D è semplice valgono 1) e 2) e sommando le tre uguaglianze membro a membro si ha

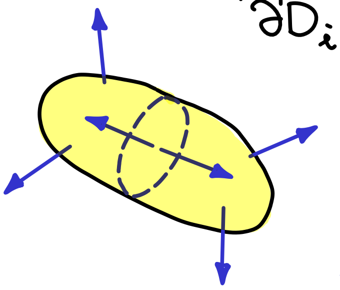
$$\iiint_D \underbrace{div(\vec{F})}_{= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}} dx dy dz = \underbrace{\iint_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle}_{\text{flusso}}$$

4) L'uguaglianza vale se D è S-decomponibile

Sia $D = D_1 \cup \dots \cup D_N$ con D_i semplice per $i = 1, \dots, N$ con $\partial D = S_1 \cup \dots \cup S_M$, allora

$$\iiint_D \mathrm{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz \overset{D=D_1\cup\dots\cup D_N}{=} \sum_{i=1}^{N} \iiint_{D_i} \mathrm{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz$$

$$\overset{3)}{=} \sum_{i=1}^{N} \iint_{\partial^+ D_i} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \sum_{j=1}^{M} \iint_{S_j} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \overset{\partial D = S_1 \cup \dots \cup S_M}{=} \iint_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle .$$



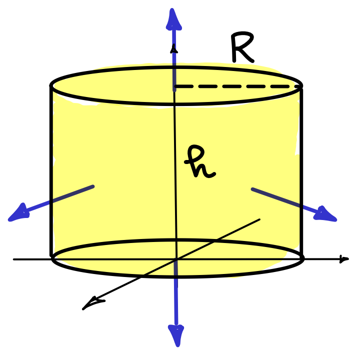
i flussi attraverso le superfici in comune vengono calcolati per entrambe le orientazioni e il loro contributo totale è nullo

$\square$

ESEMPI

- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = (x, x^2, z^2)$ e $S = \partial D$ con $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le h\}$.

S è orientata verso l'esterno.



Abbiamo che

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 1 + 2z .$$

Quindi

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \overset{\mathrm{TD}}{=} \iiint_D (1+2z)\,dx\,dy\,dz$$

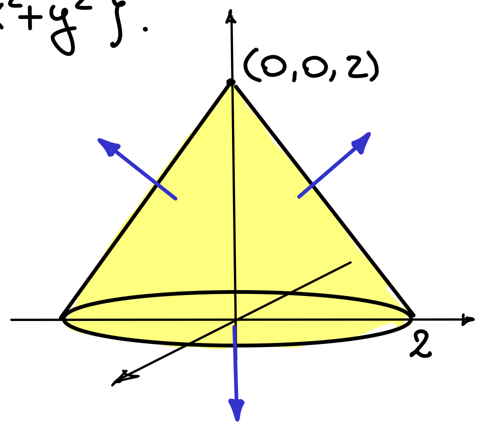
$$\overset{\mathrm{CC}}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=0}^{R} \rho\, d\rho \int_{z=0}^{h} (1+2z)\,dz = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R \cdot \left[z + z^2 \right]_0^h = \pi R^2 h (1+h)$$

che conferma il calcolo diretto fatto in precedenza.

- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F}=(1, yz, 1)$ e $S=\partial D$ con

$$D=\{(x,y,z): 0 \leq z \leq 2-\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

S è orientata verso l'esterno.



Abbiamo che

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(yz)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial z} = z.$$

Quindi

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \overset{TD}{=} \iiint_D z \, dx dy dz \overset{CC}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{2} \left(\int_{z=0}^{2-\rho} z \, dz \right) \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$= \cancel{2}\pi \int_0^2 \left[\frac{z^2}{\cancel{2}} \right]_0^{2-\rho} \rho \, d\rho = \pi \int_0^2 (2-\rho)^2 \rho \, d\rho \underset{t=2-\rho}{=} \pi \int_0^2 t^2(2-t) \, dt$$

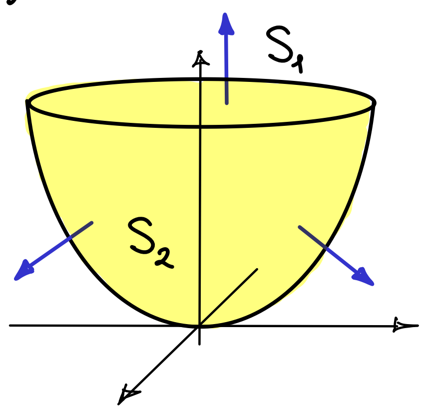
$$= \pi \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{4\pi}{3}$$

che conferma il calcolo diretto fatto in precedenza.

- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F}=(e^z, 2y, 3)$ e $S=\partial D$ con

$$D=\{(x,y,z): x^2+y^2 \leq z \leq 1\}.$$

S è orientata verso l'esterno.



$S = S_1 \cup S_2$ con

$$S_1 = \{(x,y,1): x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$S_2 = \{(x,y,x^2+y^2): x^2+y^2 \leq 1\}$$

1) Calcolo diretto.

Per S_1, $\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,1)$ e $\vec{\sigma_x}\times\vec{\sigma_y}=(0,0,1)$

$$\iint_{S_1}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}}3\,dx\,dy=3\pi.$$

verso l'alto

Per S_2, $\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$ e $\vec{\sigma_x}\times\vec{\sigma_y}=(-2x,-2y,1)$

$$\iint_{S_2}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=-\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\left(e^{\overset{z=x^2+y^2}{z}}\cdot(-2x)+2y\cdot(-2y)+3\cdot 1\right)dx\,dy$$

opposta   x-dispari   simmetrico per $x=0$

$$=0+4\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta-3\pi=\cancel{4}\pi\left[\frac{\rho^4}{\cancel{4}}\right]_0^1-3\pi=-2\pi.$$

Quindi il flusso totale uscente è

$$\iint_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=3\pi-2\pi=\pi.$$

2) Calcolo con il Teorema della divergenza.

Abbiamo che

$$\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{\partial(e^z)}{\partial x}+\frac{\partial(2y)}{\partial y}+\frac{\partial(3)}{\partial z}=2.$$

Così

$$\iint_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle\overset{TD}{=}\iiint_D 2\,dx\,dy\,dz=2|D|$$

$$=2\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}}\left(\int_{z=x^2+y^2}^1 dz\right)dx\,dy=2\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}}(1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

$$\overset{CP}{=}2\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta=4\pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1=\pi.$$