

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 33

INTEGRALI DI FLUSSO

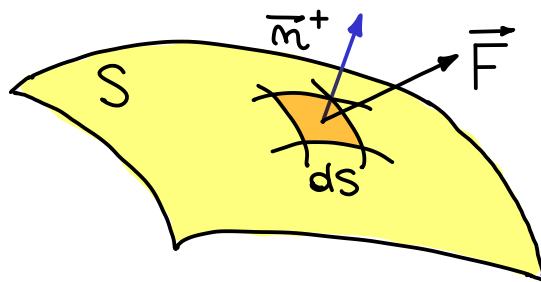
Sia $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $\vec{\sigma}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e orientata tale che D contiene S , il sostegno di $\vec{\sigma}$. Allora il FLUSSO DI $\vec{F}$ ATTRAVERSO S è definito come

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)), \vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v) \rangle du dv$$

dove

$$d\vec{S} = \vec{n}^+ dS = \frac{\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v}{\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\|} \|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\| du dv$$

è l'elemento infinitesimo d'area orientato e $\vec{n}^+ = \frac{\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v}{\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\|}$ è il versore normale a S che determina l'orientazione della superficie.



Se $S = S_1 \cup \dots \cup S_N$ è una superficie regolare a pezzi e orientata si pone

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle.$$

OSSERVAZIONE

Se $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ sono due parametrizzazioni dello stesso sottogruppo $S_1 = S_2$ allora

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

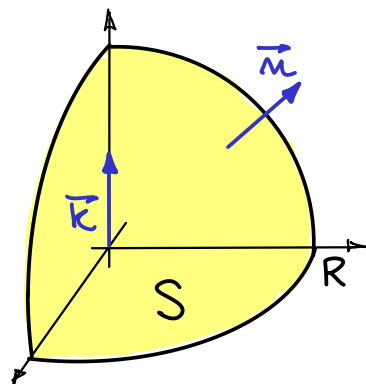
se le orientazioni di $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ sono uguali

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

se le orientazioni di $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ sono opposte

ESEMPI

- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = (0, z, 0)$ e $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x, y, z \geq 0\}$ con $R > 0$ orientata in modo che $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle \geq 0$.



1) Parametrizzazione cartesiana:

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \text{ con } A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \underline{1} \right) \Rightarrow \langle \vec{n}^+, \vec{k} \rangle \geq 0.$$

Quindi

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle \vec{F}(\vec{\sigma}(x, y)), \vec{\sigma}_u(x, y) \times \vec{\sigma}_v(x, y) \rangle dx dy$$

$$= \iint_A \overset{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{z} \cdot \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \iint_A y dx dy$$

$$\stackrel{CP}{=} \int_{p=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi/2} p \sin \theta \cdot (p dp d\theta) = \left[\frac{p^3}{3} \right]_0^R \cdot \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{3}.$$

2) Parametrizzazione in coordinate sferiche

$$\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = R(\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

con $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Allora

$$\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_\varphi = -R^2 \sin\varphi (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$$

$$\vec{n}^+ = (-\cos\theta \sin\varphi, -\sin\theta \sin\varphi, -\cos\varphi) \Rightarrow \langle \vec{n}^+, \vec{k} \rangle = -\cos\varphi \leq 0.$$

Quindi

l'orientazione indotta da $\vec{\sigma}$ è opposta

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= - \iint_A \langle \vec{F}(\vec{\sigma}(\theta, \varphi)), \vec{\sigma}_\theta(\theta, \varphi) \times \vec{\sigma}_\varphi(\theta, \varphi) \rangle d\theta d\varphi \\ &= - \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \underbrace{z}_{R \cos\varphi} \cdot (\cancel{+} R^2 \sin\varphi \cdot \sin\theta \sin\varphi) d\theta d\varphi \\ &= R^3 \cdot \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{\sin^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{3}. \end{aligned}$$

- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha/2}}$ con $\alpha > 0$ e $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ è orientata verso l'esterno. campo centrale

Per ogni $(x, y, z) \in S$ si ha che $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{R}$ e

$$\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = \left\langle \frac{(x, y, z)}{R^\alpha}, \frac{(x, y, z)}{R} \right\rangle = \frac{R^2}{R^{\alpha+1}} = \frac{1}{R^{\alpha-1}}.$$

Quindi

$|S| = 4\pi R^2$

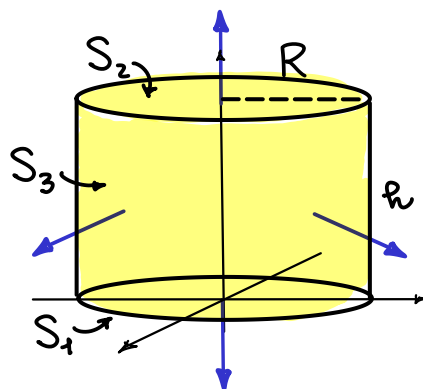
$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \frac{1}{R^{\alpha-1}} \iint_S dS = 4\pi R^{3-\alpha}.$$

Se $\alpha = 3$ il flusso è indipendente dal raggio R .

- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = (x, x^2, z^2)$ e $S = \partial D$ con
 $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$.

S è orientata verso l'esterno.

S è una superficie chiusa e regolare a pezzi composta dalle superfici S_1, S_2, S_3 .



$$S_1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq R^2\} \text{ base inferiore}$$

$$S_2 = \{(x, y, h) : x^2 + y^2 \leq R^2\} \text{ base superiore}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, z \in [0, h]\} \text{ superficie laterale}$$

1) Parametrizzazione di S_1 :

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 0) \text{ con } A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (0, 0, 1) = \vec{n}^+ \text{ normale esterna}$$

$(0, 0, -1)$ è opposta

Flusso attraverso S_1 :

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = - \overset{\text{orientazione}}{\iint_A \langle (x, x^2, \overset{z=0}{z^2}), (0, 0, 1) \rangle dx dy} = - \iint_A 0 dx dy = 0.$$

2) Parametrizzazione di S_2 :

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, h) \text{ con } A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (0, 0, 1) = \vec{n}^+ \text{ normale esterna}$$

Flusso attraverso S_2 :

$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (x, x^2, \overset{z=h}{z^2}), (0, 0, 1) \rangle dx dy = \iint_A h^2 dx dy = \pi R^2 \cdot h^2.$$

3) Parametrizzazione di S_3 :

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z) \text{ con } A = [0, 2\pi] \times [0, h].$$

$$\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_z = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0), \quad \vec{n}^+ = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \text{normale esterna}$$

Flusso attraverso S_3 :

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_A \langle (x, x^2, z^2), (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \rangle d\theta dz \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} (R^2 \cos^3 \theta + R^3 \cos^3 \theta \sin \theta + 0) d\theta dz \\ &= R^2 h \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta + R^3 h \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} = \pi R^2 h + 0. \end{aligned}$$

Quindi il flusso uscente attraverso S è

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 0 + \pi R^2 h^2 + \pi R^2 h = \pi R^2 h(1+h).$$

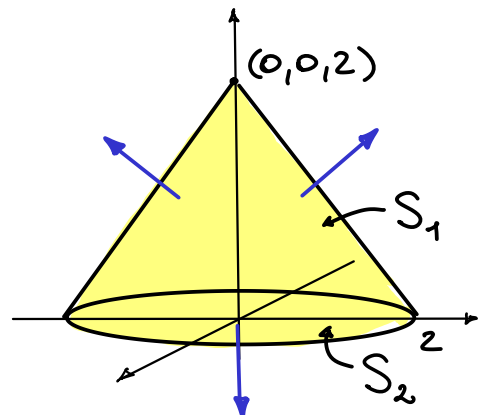
- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = (1, yz, 1)$ e $S = \partial D$ con $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

S è orientata verso l'esterno.

S è una superficie chiusa e regolare a pezzi composta dalle superfici S_1 e S_2 .

$$S_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

$$S_2 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$



1) Parametrizzazione di S_1 :

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \text{ con } A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$

e quindi il flusso è

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_A \left(\frac{1 \cdot x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{yz \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \cdot 1 \right) dx dy \\ &\quad \text{← simmetrico rispetto a } x=0 \\ &= \iint_A \frac{y^2(2 - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy + |A| \stackrel{CP}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 \frac{\rho^2 \sin^2 \theta \cdot (2 - \rho)}{\rho} \rho d\rho d\theta + 4\pi \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \cdot \left[2 \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 + 4\pi = \frac{4}{3}\pi + 4\pi = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

2) Parametrizzazione di S_2 :

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 0) \text{ con } A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (0, 0, 1) = \vec{n}^+ \text{ normale esterna } (0, 0, -1) \text{ è opposta}$$

e quindi il flusso è

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= - \iint_A \langle (1, yz, 1), (0, 0, 1) \rangle dx dy \\ &\quad \text{← } z=0 \\ &= - \iint_A 1 dx dy = -|A| = -4\pi. \end{aligned}$$

Quindi il flusso uscente attraverso S è

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \frac{16\pi}{3} - 4\pi = \frac{4\pi}{3}.$$