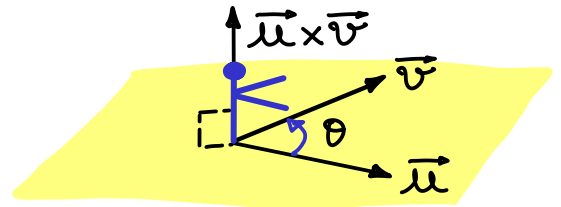


ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 30

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$ è definita la seguente operazione tra vettori $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ detto **PRODOTTO VETTORIALE**:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \in \mathbb{R}^3$$



Proprietà principali:

1) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\theta)| = \text{area del parallelogramma generato da } \vec{u} \text{ e } \vec{v}$ 

2) $\vec{u} \times \vec{v}$ è ortogonale al piano che contiene $\vec{u}$ e $\vec{v}$, orientato secondo il verso destrorso

3) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (anti-commutativo)

4) $(\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2) \times \vec{v} = \alpha \vec{u}_1 \times \vec{v} + \beta \vec{u}_2 \times \vec{v}$
 $\vec{u} \times (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha \vec{u} \times \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \times \vec{v}_2$ (bilineare)

Se $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ è un campo vettoriale C^1 in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ si definiscono i seguenti **OPERATORI DIFFERENZIALI**

1) **DIVERGENZA** di $\vec{F}$:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \text{scalare}$$

2) **ROTORE** di $\vec{F}$:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad \text{vettore}$$

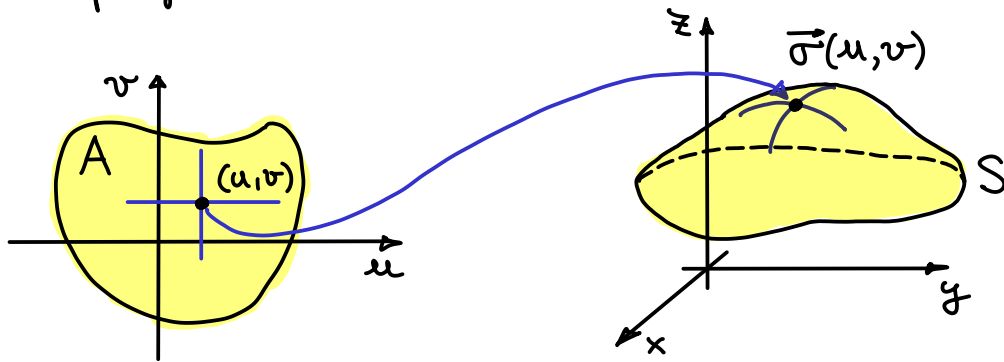
In $\mathbb{R}^3$, $\vec{F}$ è irrotazionale $\Leftrightarrow \text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

SUPERFICIE - 1ª PARTE

Una SUPERFICIE (PARAMETRICA) è una funzione continua in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ chiusura di un aperto limitato e convesso a valori in $\mathbb{R}^3$

$$A \ni (u, v) \rightarrow \vec{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

tale che $\vec{\sigma}$ è iniettiva nella parte interna di A .
L'insieme immagine $S = \vec{\sigma}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice SOSTEGNO della superficie.



Una superficie $\vec{\sigma}$ si dice REGOLARE se $\vec{\sigma} \in C^1(A)$ e per ogni (u, v) interno ad A i vettori

$$\vec{\sigma}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$$

e

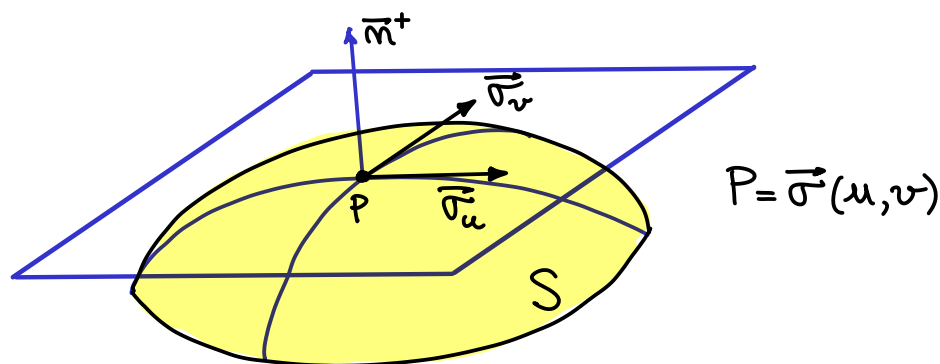
$$\vec{\sigma}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$$

sono linearmente indipendenti.

In tal caso, i vettori $\vec{\sigma}_u(u, v)$ e $\vec{\sigma}_v(u, v)$ sono tangenti al sostegno S nel punto $\vec{\sigma}(u, v)$ e

$$\vec{n}^\pm(u, v) = \pm \frac{\vec{\sigma}_u(u, v) \times \vec{\sigma}_v(u, v)}{\|\vec{\sigma}_u(u, v) \times \vec{\sigma}_v(u, v)\|} \neq 0 \quad \text{indipendenza lineare}$$

sono i VERSORI NORMALI a S in tale punto.



L'equazione del PIANO TANGENTE a S in $P=(x_0, y_0, z_0)$ è
 $\langle \vec{n}^+, (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$.

ESEMPI

- Se $f \in C^1(A)$ allora

anche le "permutazioni"
 $(u, f, v) \in (f, u, v)$

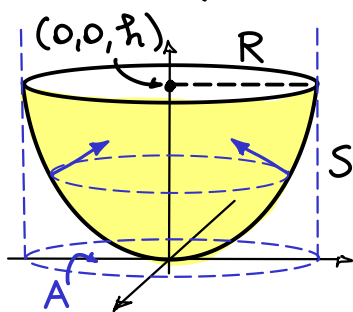
$$\vec{\sigma}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{per } (u, v) \in A$$

è una SUPERFICIE CARTESIANA che ha come
 sostegno il grafico di f su A con

$$\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{bmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$$

e $\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\| = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}$.

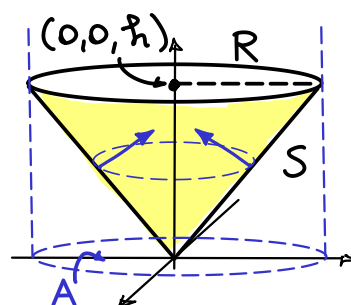
Ad esempio se $A = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq R^2\}$ allora



$u=x, v=y$
 paraboloide

$$f(x, y) = \frac{h}{R^2}(x^2 + y^2)$$

$$\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = \left(-\frac{2h}{R^2}x, -\frac{2h}{R^2}y, 1\right)$$



cono

$$f(x, y) = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = \left(\frac{-hx}{R\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-hy}{R\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

$(x, y) \neq (0, 0)$

- Cilindro lungo l'asse z .

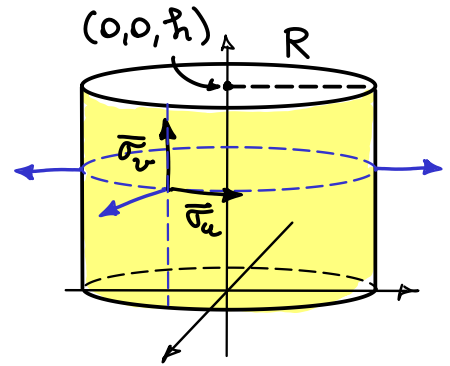
$$\vec{\sigma}(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$$

$$\text{per } (u, v) \in A = [0, 2\pi] \times [0, h]$$

$$u=0, v=z$$

$$\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin u & R \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (R \cos u, R \sin u, 0).$$

Si noti che $\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\| = R$.

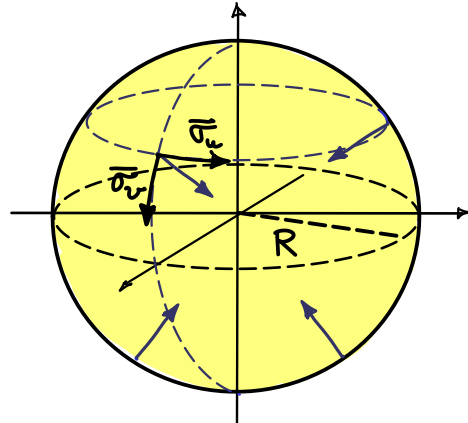


- Sfera centrata in $\vec{O}$ di raggio $R > 0$.

$$\vec{\sigma}(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v)$$

$$\text{per } (u, v) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

$$u=0, v=\varphi$$



Allora

$$\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \sin v & 0 \\ R \cos u \cos v & R \sin u \cos v & -R \sin v \end{bmatrix}$$

$$= -\sin v R^2 (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$$

$$= -\sin v R (x, y, z)$$

dove $\vec{\sigma}(u, v) = (x, y, z)$. Inoltre

$$\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\| = R \sin v \|(x, y, z)\| = R^2 \sin v.$$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $\vec{\sigma}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare tale che D contiene S il sostegno di $\vec{\sigma}$.

Allora l'INTEGRALE DI SUPERFICIE di f in S è definito come

$$\iint_S f dS = \iint_A f(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \|\vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v)\| du dv$$

dove $dS = \|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\| du dv$ è l'elemento infinitesimo d'area. Inoltre

$$\iint_S 1 dS = \iint_A \|\vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v)\| du dv = |S|$$

è l'AREA di S .

OSSERVAZIONE

L'integrale di superficie $\iint_S f dS$ non dipende dalla parametrizzazione $\vec{\sigma}$ di S .

ESEMPI

- Sia $f(x,y,z) = x^2 z^2$ e

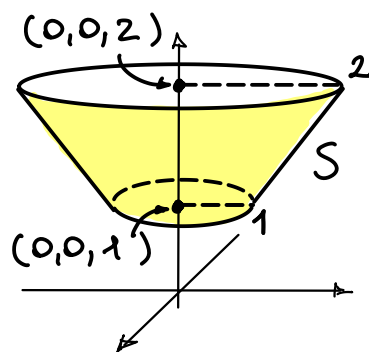
$$S = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2, z \in [1, 2]\}.$$

Calcolare $\iint_S f dS$.

Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}) \text{ con } (u,v) \in A = \{(u,v) : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

$$\text{Così } \vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right)$$



$$e \quad \|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\| = \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2} + 1} = \sqrt{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_S f dS &= \iint_A f(\vec{\sigma}(u,v)) \|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\| du dv \\ &= \iint_A u^2(u^2+v^2) \cdot \sqrt{2} du dv \\ &\stackrel{CP}{=} \sqrt{2} \int_{\rho=1}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \cdot \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_1^2 = \sqrt{2} \pi \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

- Calcolare l'area della parte di sfera

$$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, a \leq z \leq b\}$$

con $-R \leq a \leq b \leq R$.

Conduciamo la parametrizzazione

$$\vec{\sigma}(u,v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v)$$

con $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [\varphi_a, \varphi_b]$ dove $a = R \cos \varphi_a$ e $b = R \cos \varphi_b$.

Allora

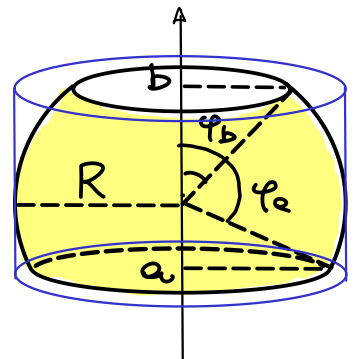
$$\vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v) = -R \sin v (x, y, z)$$

con $(x, y, z) = \vec{\sigma}(u,v)$ e

$$\|\vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v)\| = R \sin v \cdot R = R^2 \sin v.$$

Infine

$$|S| = \iint_{[0, 2\pi] \times [\varphi_a, \varphi_b]} \|\vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v)\| du dv$$



$$= R^2 \int_0^{2\pi} du \int_{\varphi_b}^{\varphi_a} \sin v \, dv = 2\pi R^2 \left[-\cos v \right]_{\varphi_b}^{\varphi_a} = 2\pi R(b-a).$$

Si noti che $2\pi R(b-a)$ è anche l'area laterale del cilindro circoscritto.

Nel caso particolare in cui $b=R$ e $a=-R$ si trova l'area della sfera completa $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

Se S è il sostegno di una superficie regolare allora il suo BARICENTRO è il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

con

$$\bar{x} = \frac{1}{|S|} \iint_S x \, dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{|S|} \iint_S y \, dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{|S|} \iint_S z \, dS.$$

- Calcolare il baricentro di

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, a \leq z \leq b\} \quad \text{Vedi esempio precedente}$$

con $-R \leq a \leq b \leq R$.

Per simmetria $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{|S|} \iint_{[0, 2\pi] \times [\varphi_a, \varphi_b]} z \|\vec{\sigma}_u(u, v) \times \vec{\sigma}_v(u, v)\| \, du \, dv \\ &= \frac{1}{2\pi R(b-a)} \int_0^{2\pi} du \int_{\varphi_b}^{\varphi_a} R \cos v \cdot R^2 \sin v \, dv \\ &= \frac{\cancel{2\pi} R^{\cancel{3}^2}}{\cancel{2\pi} R(b-a)} \left[-\frac{\cos^2 v}{2} \right]_{\varphi_b}^{\varphi_a} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}. \end{aligned}$$

In particolare se S è la semisfera superiore allora $b=R, a=0$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{R}{2})$.