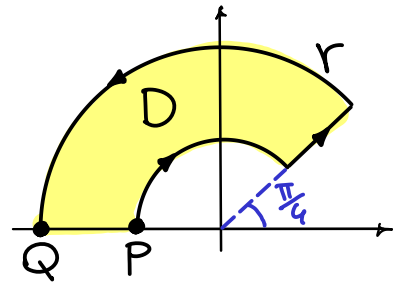


ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 29

ESEMPI

- Calcolare $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y) = (e^{-x} - 8y, \sin^2(y) - 3x^2)$ e γ è la curva da $P = (-1, 0)$ a $Q = (-2, 0)$ indicata in figura.



Per evitare il calcolo diretto applichiamo GG chiudendo il percorso con il segmento QP. Così $\partial D = \gamma \cup [Q, P]$ e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &\stackrel{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy - \int_{[Q,P]} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \\ &= (7\sqrt{2} + 9\pi) - (e^2 - e) \end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (-6x + 8) dx dy \\ &\stackrel{CP}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_1^2 (-6\rho \cos \theta + 8) \rho d\rho d\theta \\ &= -6 \left[\rho^2 \sin \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 + 8 \frac{3\pi}{4} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^2 \\ &= -2 \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (8 - 1) + 3\pi(4 - 1) = 7\sqrt{2} + 9\pi \end{aligned}$$

e

$$\int_{[Q,P]} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{-2}^{-1} F_1(t, 0) dt = \int_{-2}^{-1} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_{-2}^{-1} = e^2 - e.$$

$\curvearrowright t \rightarrow (t, 0) \quad t \in [-2, -1]$

- In un esempio precedente abbiamo considerato il campo (non conservativo)

$$\vec{F}(x,y) = (xy + x + y, y)$$

e dimostrato che

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0 \quad (*)$$

se γ è una circonferenza centrata in $(-1, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r > 0$.

Grazie alla formula GG possiamo dare una caratterizzazione delle curve chiuse semplici γ lungo le quali vale (*): se D è l'insieme delimitato da γ allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &= \pm \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \pm \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \pm \iint_D (-x-1) dx dy = \mp |D|(\bar{x}+1) \end{aligned}$$

orientazione di γ

dove $\bar{x}$ è la coordinata x del baricentro di D e $|D|$ l'area di D . Quindi (*) vale se $\bar{x} = -1$.

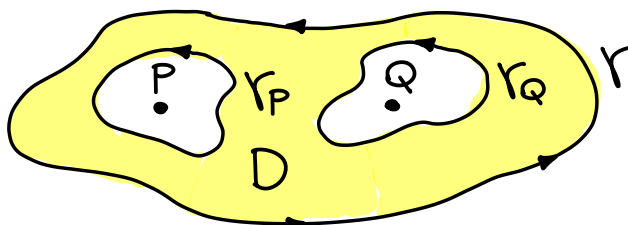
OSSERVAZIONE

Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è s -decomponibile e $\vec{F} \in C^1(D)$ è un campo irrotazionale in D allora

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \stackrel{GG}{\Rightarrow} \quad \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0.$$

Ad esempio se $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ e D è tale che

$$\partial^+ D = \gamma \cup \gamma_P^- \cup \gamma_Q^-$$



allora $\oint_{\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0$ implica che

$$\oint_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \oint_{\gamma_P} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle + \oint_{\gamma_Q} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

ovvero l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo la curva che si "avvolge" intorno ai punti P e Q è uguale alla somma degli integrali curvilinei di $\vec{F}$ lungo le curve γ_P e γ_Q che si avvolgono separatamente intorno a P e Q .

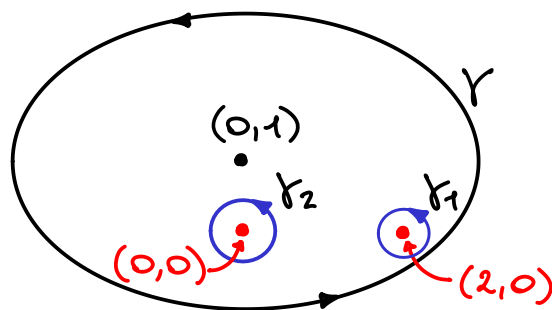
- Calcolare $\oint_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove per $(x,y) \neq (0,0)$ e $(2,0)$

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{3y}{(x-2)^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2}, \frac{-3(x-2)}{(x-2)^2 + y^2} + \frac{2x}{x^2 + y^2} \right)$$

e γ è l'ellisse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

percorre in senso antiorario.



Osserviamo che $\vec{F} = -3\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2$ con

$$\vec{F}_1(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + y^2} \right), \quad \vec{F}_2(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

irrotazionali rispettivamente in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Dato che

$$\left. \begin{aligned} \frac{(0)^2}{9} + \frac{(0-1)^2}{4} &= 0 + \frac{1}{4} < 1 \\ \frac{(2)^2}{9} + \frac{(0-1)^2}{4} &= \frac{4}{9} + \frac{1}{4} < 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (0,0) \text{ e } (2,0) \text{ sono} \\ \text{interni alla regione} \\ \text{delimitata da } \gamma \end{array}$$

Quindi per l'osservazione precedente

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &= \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle + \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \\
 &= -3 \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}_1, d\vec{s} \rangle + 2 \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}_2, d\vec{s} \rangle \\
 &= -3 \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}_1, d\vec{s} \rangle + 2 \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}_2, d\vec{s} \rangle = -3 \cdot (2\pi) + 2 \cdot (2\pi) = -2\pi
 \end{aligned}$$

calcolo diretto $\rightarrow 2\pi$
perché γ_1 non si avvolge intorno a $(0,0)$
perché γ_2 non si avvolge intorno a $(2,0)$
 $2\pi \leftarrow$ calcolo diretto

dove $\vec{\gamma}_1(t) = (2 + r_1 \cos t, r_1 \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$

$\vec{\gamma}_2(t) = (r_2 \cos t, r_2 \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$

e i raggi $r_1, r_2 > 0$ sono sufficientemente piccoli tali che γ_1 e γ_2 sono interne all'ellisse γ e non passano per $(0,0)$ e $(2,0)$.

OSSERVAZIONE

La formula di Gauss-Green permette di calcolare l'area di una regione piana D attraverso un integrale curvilineo lungo la curva chiusa data dal bordo $\partial^+ D$.

Infatti se si considera il campo

$$\vec{F}(x,y) = (-\alpha y, \beta x) \text{ con } \alpha + \beta = 1$$

allora per GG

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial^+ D} \langle (-\alpha y, \beta x), d\vec{s} \rangle &= \iint_D \left(\frac{\partial(\beta x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\alpha y)}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= (\underbrace{\beta + \alpha}_{=1}) \iint_D 1 dx dy = |D|.
 \end{aligned}$$

ESEMPIO

- Calcolare l'area di $D = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

Il bordo di D è il sostegno della curva

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t) \text{ per } t \in [0, 2\pi]$$

un'ellisse di semiasse a, b centrata in $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} \langle (-y, x), d\vec{r} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t \cdot (a \cos t)' + a \cos t \cdot (b \sin t)') dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) dt = \frac{2\pi ab}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

α=β=1/2

OSSERVAZIONE

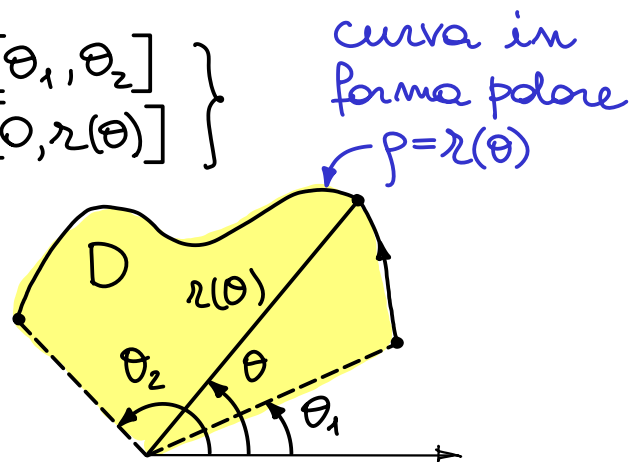
Un'altra formula per il calcolo dell'area di una regione piana D delimitata da una curva è la seguente. Sia

$$D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\ y = \rho \sin \theta, \quad \rho \in [0, r(\theta)] \end{array} \right\}$$

dove $0 \leq r(\theta) \in C([\theta_1, \theta_2])$

allora

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta.$$



La formula deriva direttamente dal cambio di variabili in coordinate polari:

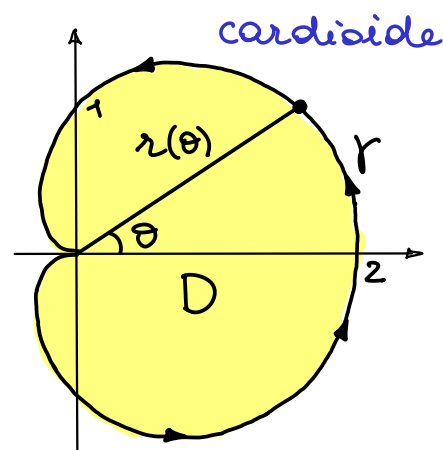
$$|D| = \iint_D 1 dx dy \stackrel{CP}{=} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_0^{r(\theta)} \rho d\rho \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [\rho^2]_0^{r(\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta) d\theta.$$

Alle stesse conclusioni si può arrivare applicando la formula precedente ottenuta con GG e $\alpha=\beta=1/2$.

ESEMPI

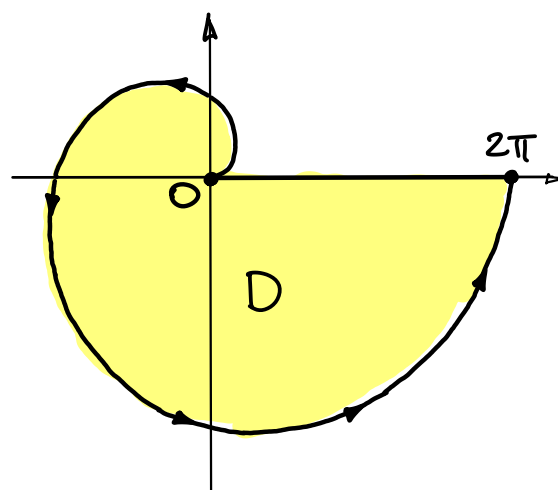
- Calcolare l'area dell'insieme D delimitato dalla curva data da $r(\theta)=1+\cos(\theta)$ per $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} (2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



- Calcolare l'area dell'insieme D delimitato dalla curva data da $r(\theta)=\theta$ per $\theta \in [0, 2\pi]$ e il segmento $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} |D| &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3}. \end{aligned}$$



spirele di Archimede