

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 28

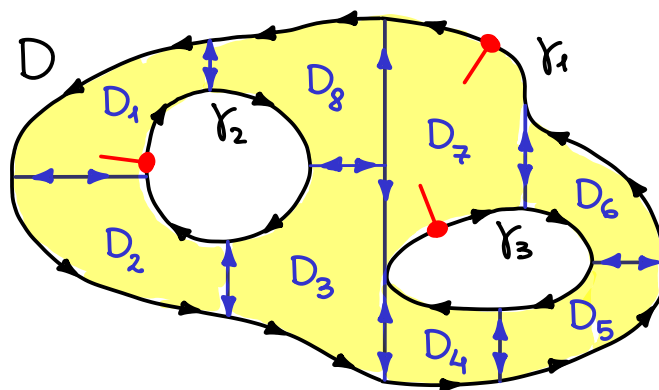
FORMULA DI GAUSS-GREEN

Le formule di Gauss-Green mette in relazione integrali doppi e integrali curvilinei di seconda specie nel piano.

Prima di enunciare la formula è necessario introdurre qualche definizione.

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice SEMPLICE se è sia x -semplice che y -semplice. In tal caso ∂D , il bordo di D , è il sostegno di una curva chiusa e si dice ORIENTATO POSITIVAMENTE/NEGATIVAMENTE se il verso di percorrenza è in senso antiorario/orario.

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice S-DECOMPONIBILE se $D = D_1 \cup \dots \cup D_N$ con $D_1, \dots, D_N$ insiemi semplici con le parti interne a due a due disgiunte e $\partial D = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_M$ con $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ sostegni di curve chiuse a due a due disgiunte.



$$D = \bigcup_{i=1}^N D_i \quad N=8$$

$$\partial D = \bigcup_{j=1}^M \gamma_j \quad M=3$$

L'orientazione positiva di ∂D si ottiene orientando $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ in modo che percorrendole, D venga lasciato sempre a sinistra.

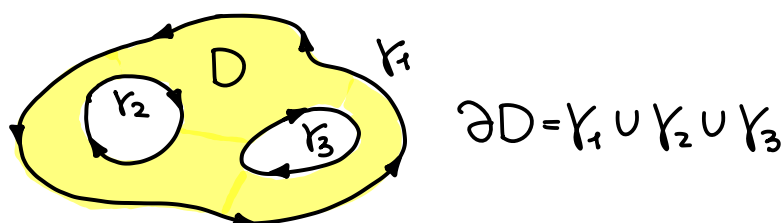
TEOREMA (DI GAUSS-GREEN)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme λ -decomponibile e sia $\vec{F} = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale C^1 in D .

Allora vale la formula

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove con $\partial^+ D$ si intende ∂D orientato positivamente.



dim. La dimostrazione è divisa in 4 passi.

1) Se D è y -semplice allora

$$-\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_{\partial^+ D} \langle (F_1, 0), d\vec{s} \rangle.$$

Abbiamo che

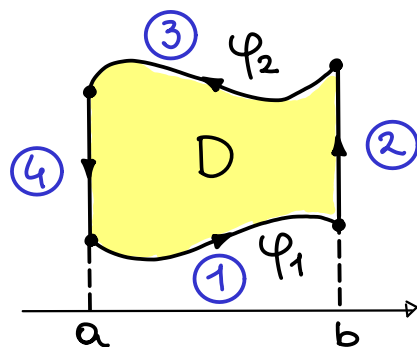
$$D = \{ (x, y) : x \in [a, b], y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \}$$

con $\varphi_1, \varphi_2 \in C([a, b])$.

Allora

$$-\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy \right) dx$$

$$\stackrel{\text{TFCI}}{=} \int_{x=a}^b \left[-F_1(x, y) \right]_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \int_a^b (F_1(x, \varphi_1(x)) - F_1(x, \varphi_2(x))) dx \quad (*)$$



Inoltre

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} \langle (F_1, 0), d\vec{s} \rangle &= \int_a^b \overset{\textcircled{1}}{F_1(x, \varphi_1(t))} \cdot \underset{\textcircled{1}}{(x)'} dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} \overset{\textcircled{2}}{F_1(b, t)} \cdot \underset{\textcircled{0}}{(b)'} dt \\
 &\quad + \int_b^a \overset{\textcircled{3}}{F_1(x, \varphi_2(t))} \cdot \underset{\textcircled{1}}{(x)'} dt + \int_{\varphi_2(a)}^{\varphi_1(a)} \overset{\textcircled{4}}{F_1(a, t)} \cdot \underset{\textcircled{0}}{(a)'} dt \\
 &= \int_a^b F_1(x, \varphi_1(t)) dt - \int_a^b F_1(x, \varphi_2(t)) dt = (*).
 \end{aligned}$$

2) Se D è x -semplice allora

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} \langle (0, F_2), d\vec{s} \rangle.$$

manca il segno -
perché lo scambio
di x con y inverte
l'orientazione di ∂D

Si dimostra in modo simile a 1).

3) Se D è semplice volgono 1) e 2) e sommando le due uguaglianze membro a membro si ha che vale la formula di Gauss-Green (GG)

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} \langle (F_1, F_2), d\vec{s} \rangle.$$

4) La formula di GG vale se D è s -decomponibile.

Infatti se $D = D_1 \cup \dots \cup D_N$ con D_i semplice per $i = 1, \dots, N$, allora

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

$D = D_1 \cup \dots \cup D_N$

$$\begin{aligned}
 &\overset{3)}{=} \sum_{i=1}^N \int_{\partial D_i} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \sum_{j=1}^M \int_{\gamma_j} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle.
 \end{aligned}$$

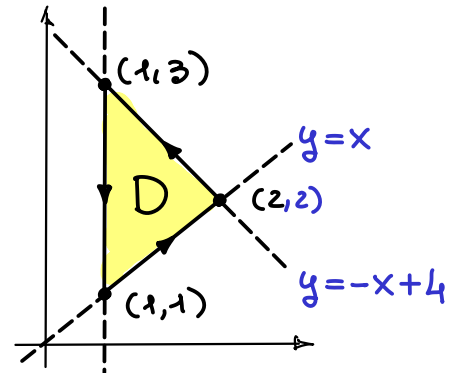
$\partial D = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_M$

i segmenti in comune vengono
percorsi in entrambi i sensi
e il loro contributo è nullo



ESEMPI

- Calcolare $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y) = (x^2 + y^2 + y, (x+y)^2)$ e γ è la curva data dal bordo del triangolo di vertice $(1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$ percorso in senso antiorario.



Invece di calcolare direttamente $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ applichiamo GG. Abbiamo che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2(x+y) - (2y+1) = 2x-1.$$

Inoltre se $D = \{(x,y) : x \in [1,2], x \leq y \leq -x+4\}$ allora $\partial^+ D$ è γ con l'orientazione richiesta.

Quindi

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \stackrel{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

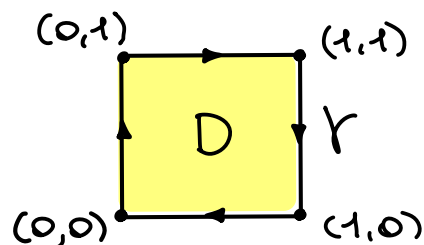
$$= \int_{x=1}^2 \left(\int_{y=x}^{-x+4} (2x-1) dy \right) dx = \int_1^2 (2x-1) \cdot (-x+4-x) dx$$

$$= \int_1^2 (-4x^2 + 10x - 4) dx = \left[-\frac{4x^3}{3} + 5x^2 - 4x \right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{32}{3} + 20 - 8 \right) - \left(-\frac{4}{3} + 5 - 4 \right) = \frac{5}{3}.$$

- Calcolare $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y) = (\frac{x}{1+y}, x^2y+2)$ e γ è il bordo di $D = [0,1] \times [0,1]$ percorso due volte in senso orario.

Dato che $1+y \neq 0$ in D possiamo applicare GG:



$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = -2 \int_{\partial D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \stackrel{GG}{=} -2 \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

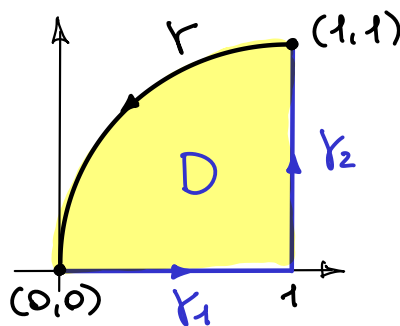
$$= -2 \iint_D \left(2xy + \frac{x}{(1+y)^2} \right) dx dy$$

$$= -2 \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 \left(2y + \frac{1}{(1+y)^2} \right) dy$$

$$= -2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \cdot \left[y^2 - \frac{1}{1+y} \right]_0^1 = -\left(1 - \frac{1}{2}\right) + (0 - 1) = -\frac{3}{2}.$$

- Calcolare $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y) = (-y^3, x^3)$ e γ è l'arco di circonferenza centrata in $(1,0)$, percorso da $(1,1)$ a $(0,0)$ nel primo quadrante.

Calcolo diretto:



$$\vec{\gamma}(t) = (1 + \cos t, \sin t) \text{ con } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-(\sin t)^3 (-\sin t) + (1 + \cos t)^3 \cos t \right) dt \stackrel{\text{calcolo lungo}}{=} ?$$

Alternativa: "chiudere" γ e usare GG:

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

con $\vec{\gamma}_1(t) = (t, 0)$ e $\vec{\gamma}_2(t) = (1, t)$ per $t \in [0, 1]$ e

$$D = \{ (x, y) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{1 - (x-1)^2} \}$$

così $\partial^+ D$ è $\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ con le orientazioni date.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^1 (-0^3 \cdot 1 + t^3 \cdot 0) dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^1 (-t^3 \cdot 0 + 1^3 \cdot 1) dt = 1$$

e

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= 3 \iint_{\left\{ \begin{array}{l} u = x-1 \\ v = y \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u^2 + v^2 \leq 1 \\ v \geq 0, u \leq 0 \end{array} \right\}} ((u+1)^2 + v^2) du dv$$

$\rightarrow u^2 + v^2 + 1 + 2u$

$$\stackrel{CP}{=} 3 \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\rho=0}^1 (\rho^2 + 1 + 2\rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta$$

$$= 3 \cdot \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 + 2 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \cdot [\sin \theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} + 2(-1) = \frac{9\pi}{8} - 2.$$

Conclusione: $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \frac{9\pi}{8} - 2 - 0 - 1 = \frac{9\pi}{8} - 3.$