ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 26

ESEMPI

- Sia $\vec{F}(x,y)=(xy+x+y,y)$ per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$?

No, perché $\vec{F}$ non è irrotazionale:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=x+1\neq\frac{\partial F_2}{\partial x}=0 \qquad \forall x\neq -1,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Esiste una curva chiusa $\vec{\gamma}$ tale che $\int_\gamma \langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=0$?

Proviamo con una circonferenza "generica":

$$\vec{\gamma}(t)=(x_0+r\cos(t),\,y_0+r\,\mathrm{sen}(t)) \qquad t\in[0,2\pi]$$

dove $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e $r>0$ sono da stabilire.

Prima di fare il calcolo osserviamo che

$$\vec{F}(x,y)=\vec{F}_1(x,y)+\vec{F}_2(x,y)$$

con $\vec{F}_1(x,y)=((x+1)y,0)$ e $\vec{F}_2(x,y)=(x,y)$. Dato che $\vec{F}_2$ è conservativo con potenziale $U(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}$ si ha

$$\int_\gamma\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_\gamma\langle\vec{F}_1,d\vec{s}\rangle=\int_0^{2\pi}\langle\vec{F}_1(\vec{\gamma}(t)),\underbrace{\vec{\gamma}'(t)}_{(-r\,\mathrm{sen}\,t,\ r\cos t)}\rangle\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(x_0+1+r\cos t)(y_0+r\,\mathrm{sen}\,t)\cdot(-r\,\mathrm{sen}\,t)\,dt$$

$$=-ry_0(x_0+1)\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,t\,dt-r^2(x_0+1)\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2t\,dt$$

$$-r^2y_0\int_0^{2\pi}\cos t\,\mathrm{sen}\,t\,dt-r^3\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2t\cos t\,dt$$

$$=0-r^2(x_0+1)\pi+0+0.$$

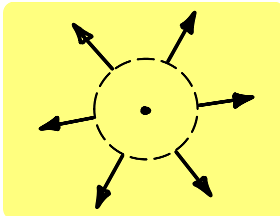
Quindi $\int_\gamma\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=0$ per ogni circonferenza $\vec{\gamma}$ con centro $(-1,y_0)$ e raggio $r>0$.

OSSERVAZIONE

Ogni campo vettoriale $(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$ dove per $i=1,\dots,n$, la componente F_i è C^1 e dipende SOLO dalla variabile x_i è conservativo con potenziale

$$U(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \int F_i(x_i)\, dx_i .$$

- Sia $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ per $(x,y) \neq (0,0)$.



$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

$\vec{F}$ è irrotazionale perché

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

Dato che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso non possiamo concludere che $\vec{F}$ è conservativo in tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ma ad esempio è conservativo nei semipiani $\{(x,y) : x>0\}$, $\{(x,y) : y<0\}$ che invece sono semplicemente connessi.

Proviamo a determinare un potenziale U ossia risolviamo le equazioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Dalla seconda integrata rispetto a y si ha

$$\int \frac{y}{x^2+y^2}\, dy \underset{\substack{t = x^2+y^2 \\ dt = 2y\,dy}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log|t| + c(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c(x)}_{= U(x,y)}.$$

Verifichiamo la prima

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c(x)\right) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}(x^2+y^2)} + c'(x) \overset{?}{=} \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Da cui $c'(x)=0$ ossia c è costante. Dunque

$$U(x,y)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c=\log(\|(x,y)\|)+c$$

è un potenziale di $\vec{F}$ in tutto $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

OSSERVAZIONE
Ogni campo vettoriale della forma

$$\vec{F}(\vec{x})=g(\|\vec{x}\|)\cdot\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\quad \forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$$

VERSORE RADIALE

con $g\in C(\mathbb{R}^+)$ si dice CENTRALE ed è conservativo in $\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ con potenziale

$$U(\vec{x})=G(\|\vec{x}\|)$$

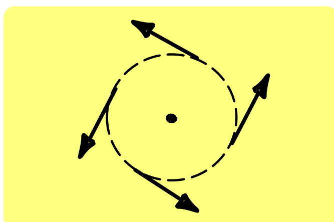
dove G è una primitiva di g. Infatti, per $i=1,\dots,n$,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x})=G'(\|\vec{x}\|)\,\frac{\partial(\|\vec{x}\|)}{\partial x_i}=g(\|\vec{x}\|)\,\frac{x_i}{\|\vec{x}\|}=F_i(\vec{x}).$$

Nell'esempio precedente $g(r)=\frac{1}{r}$ e $G(r)=\log(r)+c$.

- Sia $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ per $(x,y)\neq(0,0)$.

$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?



No, perché se $\vec{\gamma}(t)=(r\cos t, r\sin t)$ con $t\in[0,2\pi]$ allora

$$\int_\gamma\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cancel{r}\sin t}{\cancel{r^2}}\cdot(-\cancel{r}\sin t)+\frac{\cancel{r}\cos t}{\cancel{r^2}}\cdot(\cancel{r}\cos t)\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=2\pi\neq 0$$ non dipende da r

$\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

Quindi $\vec{F}$ è conservativo in ogni insieme semplicemente connesso contenuto in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Proviamo a determinare un potenziale U

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

Dalla prima integrata rispetto a x

$$\int\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} -\int\frac{y}{y^2/t^2+y^2}\left(-\frac{y}{t^2}\right)dt=\int\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

se $x\neq 0$ $\quad t=y/x$, $\quad x=y/t$, $\quad dx=-y/t^2\,dt$

$$=\operatorname{arctg}(t)+c(y)$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+c(y)=U(x,y)$$

Verifichiamo la seconda

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+c(y)\right)=\frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+c'(y)\overset{?}{=}\frac{x}{x^2+y^2}$$

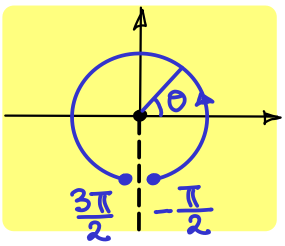
da cui $c'(y)=0$ ossia c è costante.

$$U(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+c$$

è un potenziale di $\vec{F}$ in $\{(x,y):x>0\}\cup\{(x,y):x<0\}$.

Si verifica che

$$\underbrace{U(x,y)}_{\theta}=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x) & \text{se } x>0\\ \pi/2 & \text{se } x=0 \text{ e } y>0\\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi & \text{se } x<0\end{cases}$$



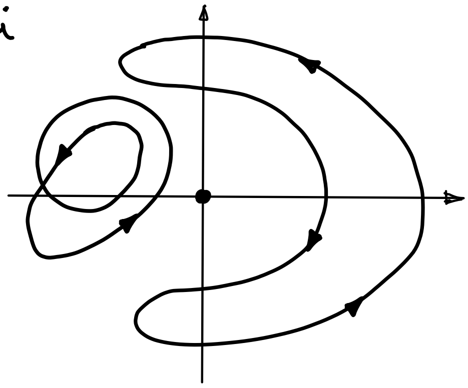
è un potenziale di $\vec{F}$ in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y):y\leq 0\}$.

Qualche altra osservazione sul campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

1) Se una curva chiusa γ non si "avvolge" intorno a $(0,0)$ allora

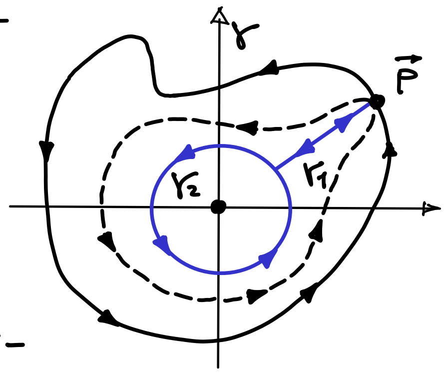
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = 0.$$



Motivo: esiste un insieme semplicemente connesso che contiene γ e non $(0,0)$ dove $\vec{F}$ è conservativo.

2) Se una curva chiusa e semplice γ si "avvolge" intorno a $(0,0)$ in senso antiorario allora

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = 2\pi.$$



Motivo: γ è omotopa a $\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_1^-$ in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e visto che $\vec{F}$ è irrotazionale, per l'invarianza omotopica,

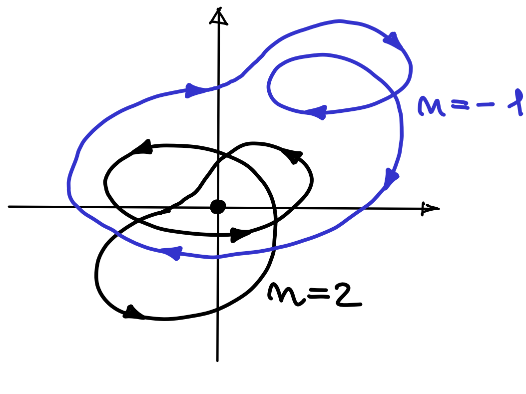
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_1^-} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle$$

γ_1 è un segmento
γ_2 è una circonferenza

$$= \cancel{\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle} + \overbrace{\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle}^{=2\pi} + \cancel{\int_{\gamma_1^-} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle} = 2\pi.$$

3) Se una curva si "avvolge" $n\in\mathbb{Z}$ volte intorno a $(0,0)$ ($n>0$ antiorario, $n<0$ orario) allora

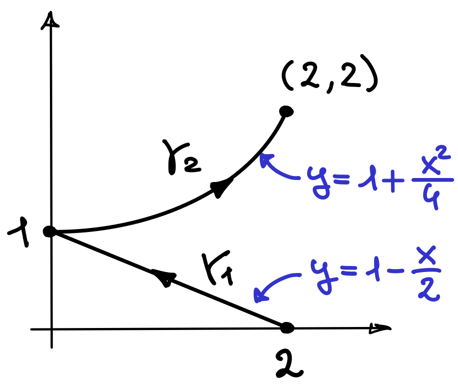
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = n\cdot 2\pi.$$



• Sia $\vec{F}(x,y)=\left(y-\frac{4y}{x^2+y^2},\ e^y+\frac{4x}{x^2+y^2}\right)$ per $(x,y)\neq(0,0)$.

Calcolare $\int_\gamma <\vec{F},d\vec{s}>$ con $\vec{\gamma}=\vec{\gamma}_1\cup\vec{\gamma}_2$ indicati in figura

γ_1 è un segmento, γ_2 è un arco della parabola $y=1+\frac{x^2}{4}$.



Notiamo che $\vec{F}=\vec{F}_1+4\vec{F}_2+\vec{F}_3$:

$\vec{F}_1(x,y)=(y,0)$ non irrotazionale $\Rightarrow$ non conservativo

$\vec{F}_2(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ è conservativo nei semplicemente connessi di $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (vedi esempio precedente)

$\vec{F}_3(x,y)=(0,e^y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ con $U_3(x,y)=e^y$.

1) $$\int_\gamma <\vec{F}_1,d\vec{s}>=\int_2^0<(y,0),\vec{\gamma}_1'(t)>dt+\int_0^2<(y,0),\vec{\gamma}_2'(t)>dt$$

con $\vec{\gamma}_1(t)=(t,1-t/2)$, $t\in[2,0]$
$\vec{\gamma}_2(t)=(t,1+t^2/4)$, $t\in[0,2]$ (vedi orientazione)

$$=\int_2^0\left(1-\frac{t}{2}\right)\cdot 1\,dt+\int_0^2\left(1+\frac{t^2}{4}\right)\cdot 1\,dt=\left[t-\frac{t^2}{4}\right]_2^0+\left[t+\frac{t^3}{12}\right]_0^2=\frac{5}{3}.$$

2) γ è contenuta in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y):y\leq 0\}$ dove $\vec{F}_2$ ha potenziale U_2 (vedi esempio precedente)

$$\int_\gamma<\vec{F}_2,d\vec{s}>=U_2(2,2)-U_2(2,0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$$

($U_2(2,2)=\operatorname{arctg}(2/2)$, $U_2(2,0)=\operatorname{arctg}(0/2)$)

3) $$\int_\gamma<\vec{F}_3,d\vec{s}>=U_3(2,2)-U_3(2,0)=e^2-e^0=e^2-1.$$

Infine $$\int_\gamma<\vec{F},d\vec{s}>=\frac{5}{3}+4\cdot\frac{\pi}{4}+e^2-1=\frac{2}{3}+\pi+e^2.$$