

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 23

CURVE IN $\mathbb{R}^n$

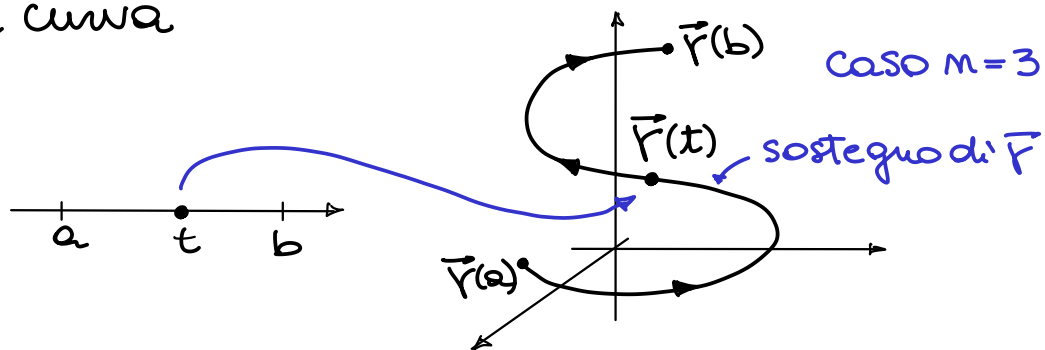
Una CURVA (PARAMETRICA) è una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}^n$

$$[a, b] \ni t \rightarrow \vec{F}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

Se $\vec{F}(a) = \vec{F}(b)$ la curva si dice CHIUSA.

Se $\vec{F}$ è iniettiva in (a, b) la curva si dice SEMPLICE.

L'insieme immagine $\gamma = \vec{F}([a, b])$ si dice SOSTEGNO della curva



Ogni curva semplice induce un'ORIENTAZIONE del sostegno della curva nel senso del percorso di $\vec{F}(t)$ al crescere del parametro t in $[a, b]$.

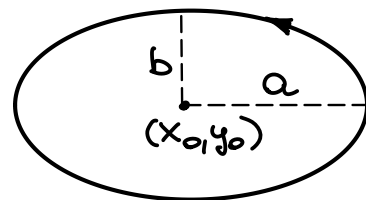
ESEMPI

- Il segmento che unisce i punti $\vec{P}, \vec{Q} \in \mathbb{R}^n$ è il sostegno delle curve

$$\vec{F}_1(t) = \vec{P} + (\vec{Q} - \vec{P})t, \quad t \in [0, 1] \quad \vec{P} \rightarrow \vec{Q}$$

$$\vec{F}_2(t) = \vec{Q} + (\vec{P} - \vec{Q})t, \quad t \in [0, 1] \quad \vec{P} \leftarrow \vec{Q}$$

- In $\mathbb{R}^2$ l'ellisse di equazione
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \text{ con } a, b > 0$$



è il sostegno della curva

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 + b \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi].$$

L'orientazione del sostegno è antioraria.

La curva

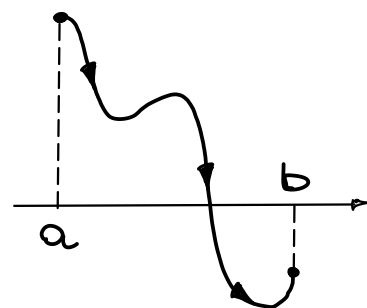
$$\vec{r}(t) = (x_0 + a \cos(t), y_0 - b \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi].$$

ha lo stesso sostegno ma orientazione oraria.

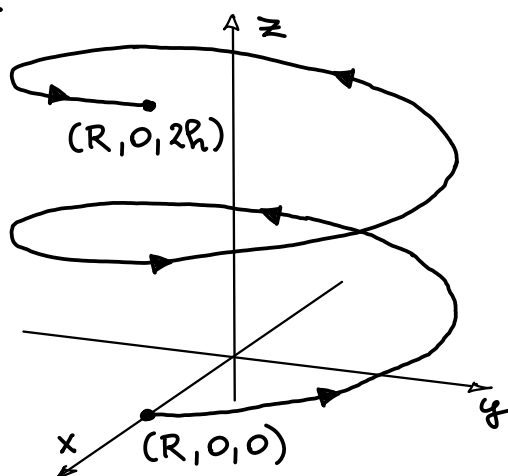
- In $\mathbb{R}^2$ se $f \in C([a, b])$ allora

$$\vec{r}(t) = (t, f(t)) \quad t \in [a, b]$$

è una curva che ha come sostegno il grafico di f in $[a, b]$.



- In $\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t), ht)$ con $t \in [0, 2]$ dove $R > 0$ e $h \geq 0$ è una curva che ha come sostegno un'elica.



In particolare questa elica ha 2 spire. Il punto iniziale è $(R, 0, 0)$ e il punto finale è $(R, 0, 2h)$.

OSSERVAZIONI

Se $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva e $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ è una funzione biunivoca e continua allora

$$[c, d] \ni s \rightarrow \vec{\gamma}_2(s) = \vec{\gamma}(\varphi(s)) \in \mathbb{R}^n$$

è una curva con lo stesso sostegno di $\vec{\gamma}$.

Allora $\vec{\gamma}$ e $\vec{\gamma}_2$ si dicono EQUIVALENTI e φ è il cambio di parametro.

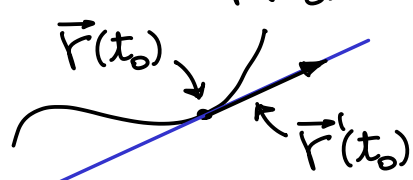
L'orientazione del sostegno di $\vec{\gamma}_2$ è lo stesso di $\vec{\gamma}_1$ se $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$ ed è opposta se $\varphi(c)=b$ e $\varphi(d)=a$ (φ è strettamente monotona).

Una curva si dice REGOLARE se $\vec{\gamma} \in C^1([a, b])$ e

$$\vec{\gamma}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)) \neq \vec{0} \quad \forall t \in [a, b]$$

↑
VETTORE TANGENTE

Allora la RETTA TANGENTE alla curva in $\vec{\gamma}(t_0)$ è

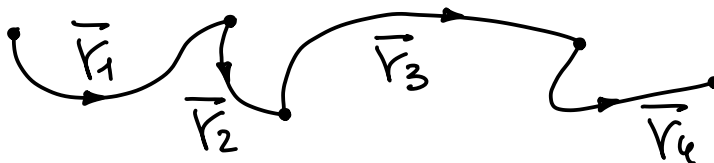
$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \vec{\gamma}(t_0) + \vec{\gamma}'(t_0)(t - t_0)$$


Siano $\vec{\gamma}_1, \dots, \vec{\gamma}_N$ curve regolari tali che

$$\vec{\gamma}_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ per } i=1, \dots, N$$

tali che $\vec{\gamma}_i(b_i) = \vec{\gamma}_{i+1}(a_{i+1})$ per $i=1, \dots, N-1$.

Allora $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2 \cup \dots \cup \vec{\gamma}_N$ è la curva REGOLARE A TRATTI che ha come sostegno l'unione dei sostegni



INTEGRALI CURVILINEI DI PRIMA SPECIE

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare tale che $\gamma \subseteq D$. Allora l'INTEGRALE CURVILINEO di f lungo γ è definito come

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \|\vec{\gamma}'(t)\| dt.$$

dove $ds = \|\vec{\gamma}'(t)\| dt$ è l'elemento infinitesimo d'arco.

Inoltre $\int_{\gamma} 1 ds = \int_a^b \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = |\gamma|$ è la LUNGHEZZA di γ .

Se $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2 \cup \dots \cup \vec{\gamma}_N$ è una curva regolare a tratti

$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} f ds.$$

OSSERVAZIONI

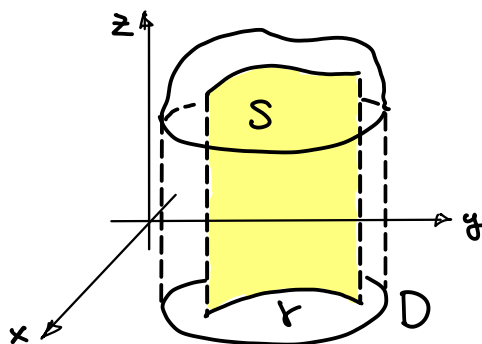
1) Se $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ sono curve equivalenti allora

$$\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds.$$

2) Se $n=2$ e $f \geq 0$ lungo il sostegno di $\vec{\gamma}$ allora

$\int_{\gamma} f ds$ è l'area della superficie

$$S = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z \in [0, f(x(t), y(t))], t \in [a, b]\}$$



ESEMPI

- Determinare la lunghezza della curva

$\vec{r}(t) = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t), ht)$ con $t \in [0, 1]$.
elica + spira

Allora

e $\vec{r}'(t) = (R(-\sin(2\pi t)) \cdot 2\pi, R \cos(2\pi t) \cdot 2\pi, h)$

$$\|\vec{r}'(t)\|^2 = (2\pi R)^2 \cdot (\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)) + h^2 = (2\pi R)^2 + h^2.$$

Quindi

$$|r| = \int_0^1 \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}.$$

Se $h=0$ si trova la lunghezza della circonferenza: $2\pi R$.

- $\int_C \frac{xy \sin(y)}{\sqrt{1+x^2}} ds$ con $\vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{2})$ $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$
parte del grafico di $y = \frac{x^2}{2}$

Si ha che

$$\vec{r}'(t) = (1, t) \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$$

da cui

$$\int_C \frac{xy \sin(y)}{\sqrt{1+x^2}} ds = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \frac{t \cdot \frac{t^2}{2} \sin(\frac{t^2}{2})}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \sqrt{1+t^2} dt$$

$u = \frac{t^2}{2}$
 $du = t dt$

$$= \int_0^{\pi} u \sin(u) du = \int_0^{\pi} u d(-\cos(u))$$

$$= \left[u(-\cos(u)) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(u) du$$

$$= \pi + \left[\sin(u) \right]_0^{\pi} = \pi.$$

- Determinare l'area di

$$S = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, y = \frac{x^2}{4}, 0 \leq z \leq 3x \right\}$$

Sia $\vec{\gamma}(t) = (t, \frac{t^2}{4})$ con $t \in [0, 2]$ allora

$$|S| = \int_{\gamma} 3x \, ds = \int_0^2 3t \cdot \left\| \left(1, \frac{t}{2} \right) \right\| dt = 3 \int_0^2 t \sqrt{1 + \frac{t^2}{4}} dt$$

$$\begin{aligned} u &= 1 + \frac{t^2}{4} \\ du &= \frac{t \, dt}{2} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad = 3 \int_1^2 u^{1/2} \cdot 2 \, du = \frac{2}{3} \left[\frac{2u^{3/2}}{3} \right]_1^2 = 8\sqrt{2} - 4.$$

Se $\vec{\gamma}$ è una curva regolare in $\mathbb{R}^m$ allora il suo BARICENTRO è il punto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ tale che

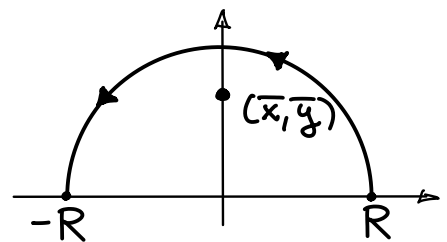
$$\bar{x}_i = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} x_i \, ds \quad i=1, \dots, m.$$

- Determinare il baricentro della semicirconferenza $\vec{\gamma}(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$ con $t \in [0, \pi]$.

Per simmetria $\bar{x} = 0$. Inoltre

$$\vec{\gamma}'(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))$$

da cui $\|\vec{\gamma}'(t)\| = R$.



$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{\pi R} \int_{\gamma} y \, ds = \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} \cancel{R} \sin(t) \underbrace{\|\vec{\gamma}'(t)\|}_{=R} dt \\ &= \frac{R}{\pi} \left[-\cos(t) \right]_0^{\pi} = \frac{2R}{\pi}. \end{aligned}$$