ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 22

ESEMPI

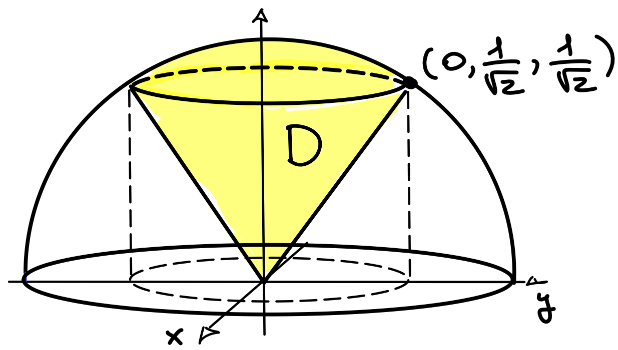
- $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz \qquad D=\left\{(x,y,z): \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ z^2\ge x^2+y^2,\ z\ge 0 \end{array}\right\}.$

sfera

doppio cono

Coordinate sferiche:

$$\vec{\Phi}^{-1}(D)=\left\{(\rho,\theta,\varphi): \begin{array}{l} \rho\in[0,1] \\ \theta\in[0,2\pi) \\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \end{array}\right\}$$



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2z^2=1 \\ z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\overset{CS}{=}\iiint_{\vec{\Phi}^{-1}(D)} \rho\cdot\rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int_{\rho=0}^{1}\rho^3 d\rho\cdot\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\cdot\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}(\varphi)\,d\varphi$$

$$=\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\cdot 2\pi\cdot\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi/4}=\frac{2\pi}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)=\frac{\pi}{4}(2-\sqrt{2}).$$

- $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot z x^2\,dx\,dy\,dz \qquad D=\left\{(x,y,z): \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ z^2\ge x^2+y^2,\ z\ge 0 \end{array}\right\}$

Coordinate cilindriche:

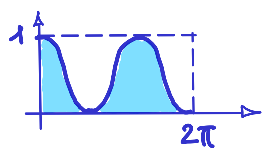
$$\vec{\Phi}^{-1}(D)=\left\{(\rho,\theta,z): \rho\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ \theta\in[0,2\pi],\ \rho\le z\le\sqrt{1-\rho^2}\right\}$$

$$\overset{CC}{=}\iiint_{\vec{\Phi}^{-1}(D)} \rho\cdot z(\rho\cos\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \underbrace{\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)}_{=\pi}\int_{\rho=0}^{1/\sqrt{2}}\rho^4\left(\int_{z=\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}}z\,dz\right)d\rho$$

$$=\pi\int_0^{1/\sqrt{2}}\rho^4\cdot\frac{1}{2}(1-\rho^2-\rho^2)\,d\rho=\pi\left[\frac{\rho^5}{10}-\frac{\rho^7}{7}\right]_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{(\sqrt{2})^5}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{\cancel{8}\,2}\cdot\frac{\cancel{4}\,1}{140}=\frac{\pi\sqrt{2}}{280}.$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\pi$$



Sia D un insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ allora il BARICENTRO di D è il punto $(\overline{x}, \overline{y})$ tale che

$$\overline{x} = \frac{1}{|D|} \iint_D x \, dx dy \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{|D|} \iint_D y \, dx dy$$

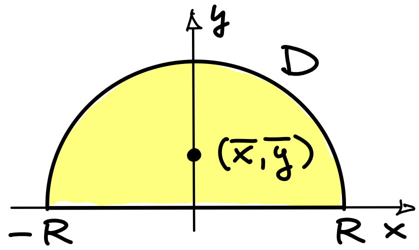
Analogamente se D è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^3$ allora il BARICENTRO di D è il punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tale che

$$\overline{x} = \frac{1}{|D|} \iiint_D x \, dx dy dz \, , \; \overline{y} = \frac{1}{|D|} \iiint_D y \, dx dy dz \, , \; \overline{z} = \frac{1}{|D|} \iiint_D z \, dx dy dz \, .$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Determinare il baricentro di

$$D = \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2, \, y \geq 0 \right\}.$$



Si ha che $|D| = \frac{\pi R^2}{2}$ e

$$\overline{x} = \frac{2}{\pi R^2} \iint_D x \, dx dy = 0$$

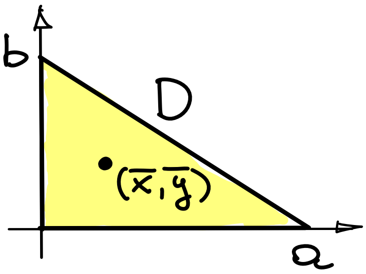
perché $(-x) = -x$ e D è simmetrico rispetto a $x = 0$

$$\overline{y} = \frac{2}{\pi R^2} \iint_D y \, dx dy \overset{CP}{=} \frac{2}{\pi R^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{R} (\rho \sin\theta) \cdot \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{R} = \frac{4R^{\cancel{3}}}{3\pi \cancel{R^2}} = \frac{4R}{3\pi} .$$

• Determinare il baricentro di

$$D=\left\{ (x,y) : \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1, x\geq 0, y\geq 0 \right\} \text{ con } a,b>0.$$



Si ha che $|D|=\frac{a\cdot b}{2}$ e

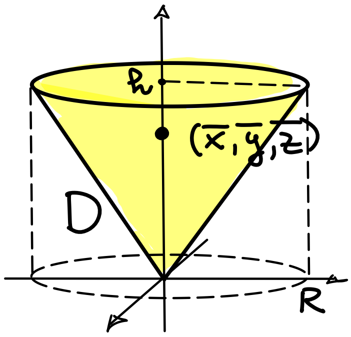
$$\overline{x}=\frac{2}{ab}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{2}{ab}\int_{x=0}^{a} x\left(\int_{y=0}^{b(1-\frac{x}{a})} dy\right)dx$$

$$=\frac{2}{a\cancel{b}}\int_0^a x\cdot\cancel{b}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right]_0^a=\frac{a}{3}.$$

Analogamente $\overline{y}=\frac{b}{3}$.

• Determinare il baricentro di

$$D=\left\{ (x,y,z): \frac{x^2+y^2}{R^2}\leq\frac{z^2}{h^2}, 0\leq z\leq h \right\}$$



Per simmetria $\overline{x}=\overline{y}=0$ e

$$\overline{z}=\frac{1}{|D|}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz \quad \text{con } |D|=\frac{\pi R^2 h}{3}.$$

$\vec{\Phi}$ coordinate cilindriche:

$$\vec{\Phi}^{-1}(D)=\left\{ (\rho,\theta,z): \begin{matrix}\rho\in[0,R] \\ \theta\in[0,2\pi)\end{matrix}, \frac{h}{R}\rho\leq z\leq h \right\}$$

$$=\frac{3}{\pi R^2 h}\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\cdot\left(\int_0^R\left(\int_{h\rho/R}^{h} z\,dz\right)\rho\,d\rho\right)$$

$$=\frac{3}{\cancel{\pi}R^2 h}\cdot\cancel{2\pi}\int_0^R\left[\frac{z^2}{\cancel{2}}\right]_{\frac{h\rho}{R}}^{h}\rho\,d\rho$$

$$=\frac{3}{R^2\cancel{h}}\int_0^R\left(h^{\cancel{2}}-\frac{h^{\cancel{2}}\rho^2}{R^2}\right)\rho\,d\rho$$

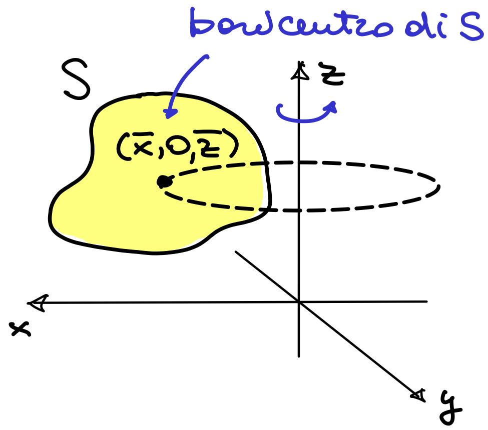
$$=\frac{3h}{R^2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4R^2}\right]_0^R=\frac{3h}{\cancel{R^2}}\cancel{R^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3h}{4}.$$

OSSERVAZIONE

Consideriamo il solido D generato dalla rotazione di una regione $S \subseteq \{(x,0,z): x \geq 0\}$:

$$D = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}, 0, z) \in S\}.$$

Il volume di D è dato da



$$|D| = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz \overset{CC}{=} \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

$$= 2\pi \iint_S \rho\,d\rho\,dz$$

dove

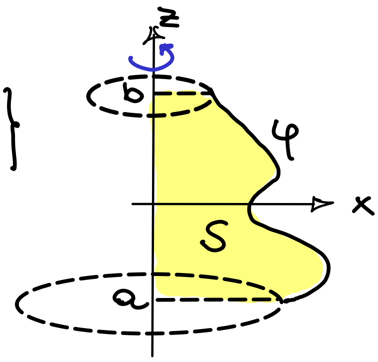
$$\Phi^{-1}(D) = \{(\rho,\theta,z) : \theta \in [0,2\pi], (\rho,z) \in S\}$$

da cui si ottiene la FORMULA DI PAPPO-GULDINO PER SOLIDI DI ROTAZIONE

$$|D| = 2\pi\bar{x} \cdot |S| \qquad \bar{x} = \frac{1}{|S|}\iint_S x\,dx\,dz$$

ossia il volume di D è dato dal prodotto della lunghezza della circonferenza descritta dalla rotazione del baricentro di S e dell'area di S.

Nel caso particolare in cui



$$S = \{(x,z) : 0 \leq x \leq \varphi(z), a \leq z \leq b\}$$

con $\varphi \in C([a,b])$, si ha che

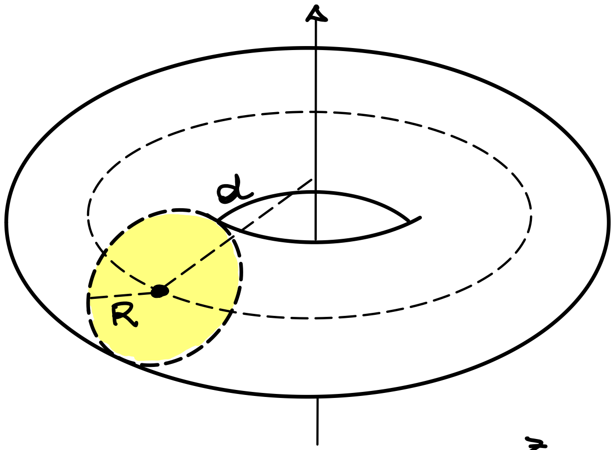
$$|D| = 2\pi \iint_S \rho\,d\rho\,dz$$

$$= 2\pi \int_{z=a}^{b} \left(\int_{\rho=0}^{\varphi(z)} \rho\,d\rho\right) dz = \cancel{2}\pi \int_{z=a}^{b} \left[\frac{\rho^2}{\cancel{2}}\right]_0^{\varphi(z)} dz = \pi \int_a^b \varphi^2(z)\,dz.$$

ESEMPIO

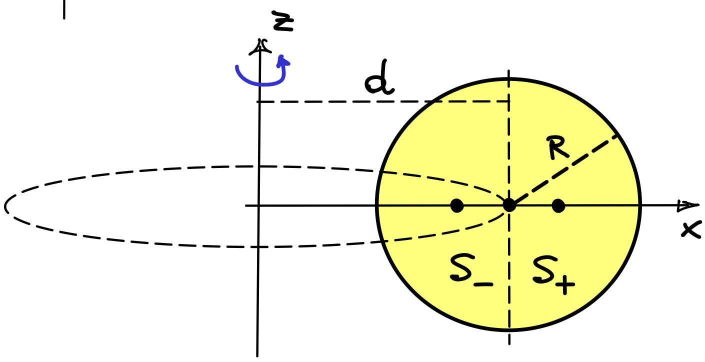
- Ruotando un cerchio di raggio R con il centro a distanza $d>R$ dall'asse z si ottiene un TORO:

$$D=\left\{(x,y,z):\left(\sqrt{x^2+y^2}-d\right)^2+z^2\leq R^2\right\}$$



Dato che il baricentro del cerchio è il suo centro, ne segue che il volume del toro è

$$|D|=2\pi d\cdot\pi R^2$$



Si noti che ruotando separatamente i due semicerchi S_+ e S_- si ottengono due solidi D_+ e D_- di volumi diversi: i baricentri di S_+ e S_- sono rispettivamente a distanza $d+\frac{4R}{3\pi}$ e $d-\frac{4R}{3\pi}$ dall'asse z e quindi

vedi baricentro semicerchio

$$|D_+|=2\pi\left(d+\frac{4R}{3\pi}\right)\pi R^2 \quad e \quad |D_-|=2\pi\left(d-\frac{4R}{3\pi}\right)\pi R^2$$

da cui $|D_+|>|D_-|$ e $|D|=|D_+|+|D_-|$.

OSSERVAZIONE

Sia D un solido dove ogni suo punto (x,y,z) ha una certa densità di massa $\delta(x,y,z)$ e una certa velocità $\vec{v}(x,y,z)$ allora l'energia cinetica di D è

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\iiint_D |\vec{v}(x,y,z)|^2\cdot \overbrace{\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}^{dM}$$

Nel caso particolare in cui D sia omogeneo (δ = costante) e ruoti attorno ad un asse $\vec{\ell}$ con velocità angolare ω allora

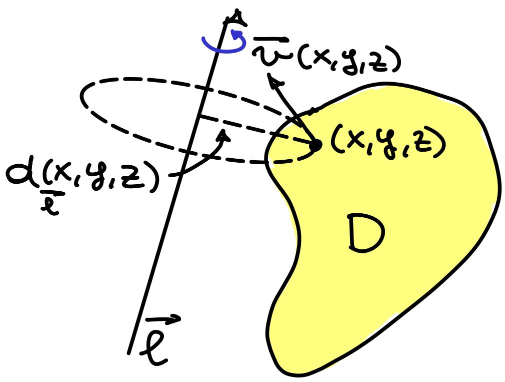
$$|\vec{v}(x,y,z)|=\omega\cdot d_{\vec{\ell}}(x,y,z)$$

distanza di (x,y,z) dall'asse $\vec{\ell}$

e dunque

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\omega^2\cdot\delta\iiint_D d^2_{\vec{\ell}}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}I\omega^2$$

dove I è il MOMENTO D'INERZIA di D rispetto a $\vec{\ell}$.



Se $M=\delta|D|$ è la massa di D allora il rapporto I/M dipende solo dalla forma di D e la sua posizione rispetto all'asse di rotazione $\vec{\ell}$:

$$\frac{I}{M}=\frac{1}{|D|}\iiint_D d^2_{\vec{\ell}}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Determinare il rapporto I/M per un cilindro omogeneo rispetto al suo asse.

Sia $D=\left\{(x,y,z) : x^2+y^2\leq R^2, 0\leq z\leq h\right\}$ e sia $\vec{l}$ l'asse z.

$$\frac{I}{M}=\frac{1}{|D|}\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$\overset{CC}{=}\frac{1}{\pi R^2 h}\int_{z=0}^{h}dz\cdot\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\cdot\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\frac{\cancel{h}\cdot\cancel{2\pi}\cdot\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}\,2}}{\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cdot\cancel{h}}=\frac{1}{2}R^2.$$

- Determinare il rapporto I/M per una palla omogenea rispetto ad un suo asse.

Sia $D=\left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2\leq R^2\right\}$ e $\vec{l}$ l'asse z.

$$\frac{I}{M}=\frac{1}{|D|}\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$\overset{CS}{=}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}(\rho\,\mathrm{sen}(\varphi))^2\rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{\frac{4}{3}\cancel{\pi}R^3}\cdot\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R\cdot 2\cancel{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(1-\cos^2(\varphi))\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{2}{5}R^2\cdot\frac{3}{4}\left[-\cos(\varphi)+\frac{\cos^3(\varphi)}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{5}R^2\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}=\frac{2}{5}R^2.$$