

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 14

TEOREMA

 (DELLE FUNZIONI IMPLICITE PER SISTEMI)

Siano $f_1, \dots, f_m \in C^1(A)$ con A insieme aperto di $\mathbb{R}^{m+m}$ e sia $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in A$ tale che

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0 \end{cases}$$

Se

$$\det \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \right]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m}} \right) \neq 0$$

← MATRICE JACOBIANA DI $\vec{f}$ RISPETTO A $\vec{y}$
righe
colonne

allora $\exists r, s > 0$ e $\exists$ uniche $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1(B_r(\bar{x}_0))$

tali che $\vec{\varphi}(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$,

$(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$
e

$$\vec{\varphi} : B_r(\bar{x}_0) \rightarrow B_s(\bar{y}_0)$$

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}, \vec{\varphi}(\bar{x})) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}, \vec{\varphi}(\bar{x})) = 0 \end{cases} \quad \forall \bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$$

ESEMPIO

- Il sistema
$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0 \\ f_2(x, y, z) = x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

è soddisfatto in $(x, y, z) = (2, 2, 0)$.

La matrice jacobiana di f_1, f_2 rispetto a y e z è

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[y=2]{z=0} \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 8 \neq 0.$$

Per il teo. delle funzioni implicite $\exists \varphi_1$ e φ_2 funzioni C^1 tali che $\varphi_1(2)=2$, $\varphi_2(2)=0$ e $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ soddisfa il sistema (*) $\forall x \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.
Per determinare $\varphi_1'(2)$ e $\varphi_2'(2)$ basta derivare (*) e risolvere il sistema ottenuto. Abbiamo che

$$\begin{cases} x^2 + \varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) - 8 = 0 \\ x + \varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) - 4 = 0 \end{cases}$$

e derivando rispetto a x si ha

$$\begin{cases} 2x + 2\varphi_1(x) \cdot \varphi_1'(x) + 2\varphi_2(x) \cdot \varphi_2'(x) = 0 \\ 1 + \varphi_1'(x) + 2\varphi_2'(x) = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x=2$

$$\begin{cases} 4 + 4\varphi_1'(2) + 0 = 0 \\ 1 + \varphi_1'(2) + 2\varphi_2'(2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1'(2) \\ \varphi_2'(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\swarrow \det \neq 0$

Quindi risolvendo si ottiene

$$\varphi_1'(2) = -1, \quad \varphi_2'(2) = 0.$$

Dal punto di vista geometrico il sistema è l'intersezione tra la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ e il piano $x + y + 2z = 4$ ossia una circonferenza in $\mathbb{R}^3$ di cui $(2, 2, 0)$ è un punto.

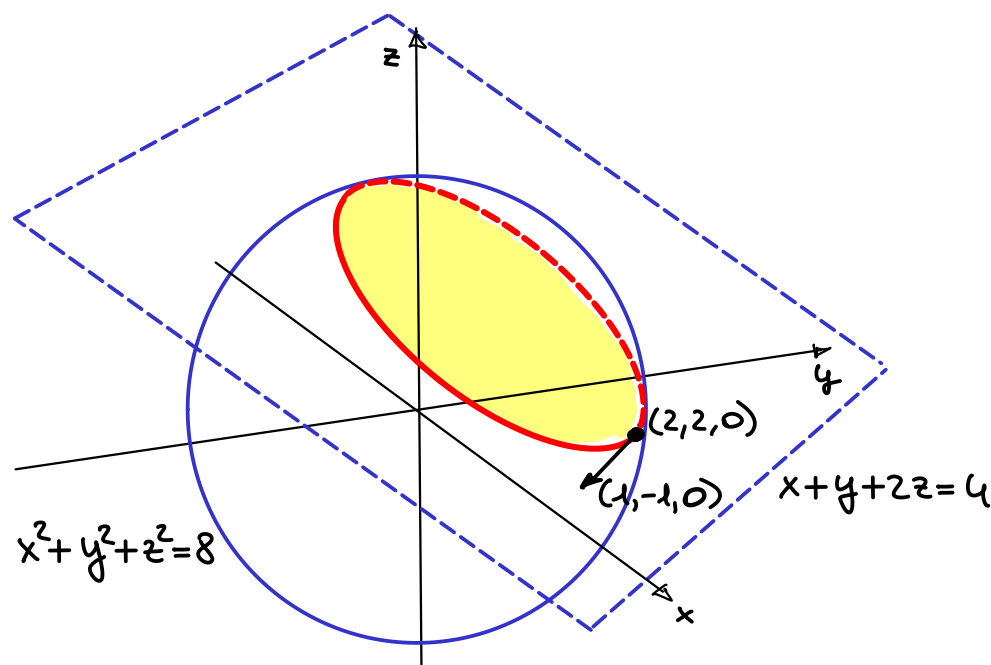
Tale circonferenza "vicino" al punto $(2, 2, 0)$ è descritta rispetto al parametro x come

$$(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \ni x \rightarrow (x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \text{ con } \varepsilon > 0.$$

Quindi

$$\overset{=x'}{(1, \varphi_1'(2), \varphi_2'(2))} = (1, -1, 0)$$

è un vettore tangente alla circonferenza in $(2, 2, 0)$.



MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\Gamma \subseteq D$.

$\bar{x}_0 \in \Gamma$ si dice PUNTO DI MASSIMO (MINIMO)
ASSOLUTO VINCOLATO A Γ se

$$\forall \bar{x} \in \Gamma \quad f(\bar{x}) \underset{(\geq)}{\leq} f(\bar{x}_0)$$

$\bar{x}_0 \in \Gamma$ si dice PUNTO DI MASSIMO (MINIMO)
RELATIVO VINCOLATO A Γ se

$$\exists r > 0 : \forall \bar{x} \in B_r(\bar{x}_0) \cap \Gamma \quad f(\bar{x}) \underset{(\geq)}{\leq} f(\bar{x}_0)$$

OSSERVAZIONE

Siano Γ_1, Γ_2 due vincoli con $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq D$.

Se $\bar{x}_0 \in \Gamma_1$ è un punto di max/min assoluto
/relativo vincolato a Γ_2 allora lo è anche
vincolato Γ_1 . Non vale il viceversa.

ESEMPIO

• Sia $f(x,y) = x^2 - y^2$.

1) Vincolato a $\Gamma = \{(x,y) : y=0\}$, $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto:

$$\forall (x,y) \in \Gamma \quad f(x,0) = x^2 \geq f(0,0) = 0.$$

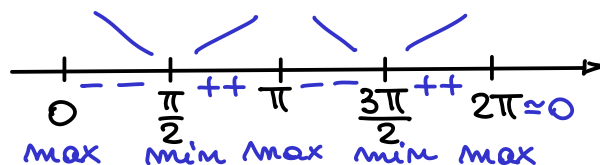
2) Vincolato a $\Gamma = \{(x,y) : x=0\}$, $(0,0)$ è un punto di massimo assoluto:

$$\forall (x,y) \in \Gamma \quad f(0,y) = -y^2 \leq f(0,0) = 0.$$

3) Vincolato a $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ si ha che posto $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$

$$g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$$

$$g'(\theta) = 2\sin(2\theta)$$



Quindi

$$(\cos(0), \sin(0)) = (1, 0) \quad (\cos(\pi), \sin(\pi)) = (-1, 0)$$

sono punti di massimo assoluto con valore

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$$

mentre

$$(\cos(\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})) = (0, 1) \quad (\cos(\frac{3\pi}{2}), \sin(\frac{3\pi}{2})) = (0, -1)$$

sono punti di minimo assoluto con valore

$$f(0, 1) = f(0, -1) = -1.$$

TEOREMA (DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE)

Siano $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(A)$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq m < n$.

Sia $\bar{x}_0$ un punto di max/min relativo vincolato a

$$\Gamma = \{ \bar{x} \in A : g_i(\bar{x}) = 0 \text{ per } i=1, \dots, m \}.$$

Se $\bar{x}_0$ è un PUNTO REGOLARE di Γ ossia

numero max di
righe/colonne
linear. indipendenti.

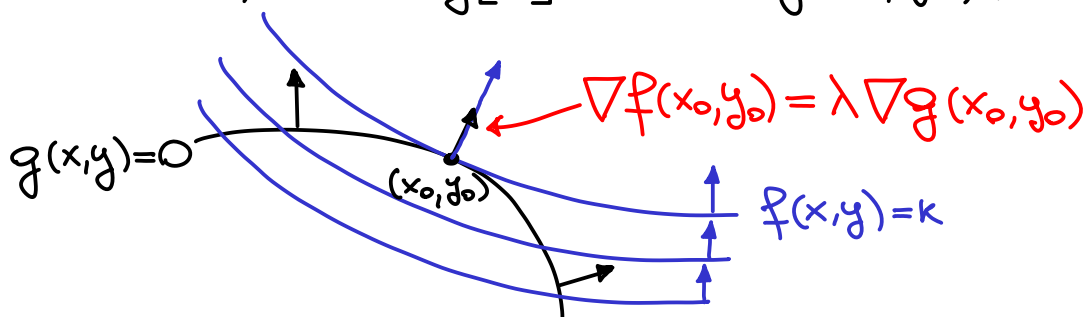
$$\text{rang} \left(\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{x}_0) \right]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \right) = m$$

allora $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ detti MOLTIPLICATORI tali che

$$\nabla f(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}_0)$$

ossia $\bar{x}_0$ è un PUNTO STAZIONARIO VINCOLATO.

dim. Caso $m=2, n=1$. $\text{rang}[\dots]=1 \Rightarrow \nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.



Supponiamo che $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ (simile se $g_x(x_0, y_0) \neq 0$)

Per il teorema delle funzioni implicite $\exists r > 0$ e $\exists \varphi \in C^1((x_0 - r, x_0 + r))$ tale che $\varphi(x_0) = y_0$ e

$$g(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

con

$$\varphi'(x_0) = - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} \quad (*)$$

Consideriamo la funzione $C^1((x_0 - r, x_0 + r))$

$$h(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Dato che (x_0, y_0) è un punto di max/min relativo di f vincolato a $g(x, y) = 0$, x_0 è un punto di max/min relativo di h in $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Allora per il teorema di Fermat in una variabile $h'(x_0) = 0$.

Calcoliamo la derivata prima di h :

$$h'(x) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

e quindi per $x = x_0$ e (*) si ha

$$h'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \left(-\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} \right)$$

Ponendo $\lambda = \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$ si ottiene

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0) \end{cases} \iff \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

□

OSSERVAZIONE

Per il teorema le condizioni necessarie da soddisfare sono

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{x}_0) = 0 & \text{per } j=1, \dots, n \\ g_i(\bar{x}_0) = 0 & \text{per } i=1, \dots, m \end{cases}$$

In altre parole $(\bar{x}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ è un punto stazionario della funzione

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\bar{x})$$

detta LAGRANGIANA.

ESEMPIO

- Sia $f(x,y) = x^2 - y^2$ con $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Determinare max/min assoluti di f in Γ .

Poniamo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ allora

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0) \notin \Gamma$$

tutti i punti di Γ sono regolari. Per determinare i punti stazionari vincolati risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y(1+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} x=0 \\ y(1+\lambda)=0 \\ y^2=1 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda=1 \\ y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} (x,y) &= (0, \pm 1), \lambda = -1 \\ (x,y) &= (\pm 1, 0), \lambda = 1 \end{aligned}$$

Dato che f è continua e Γ è compatto per il teo. di Weierstrass, f ammette in Γ punti di max/min assoluto. Confrontando i valori nei punti

stazionari vincolati $f(\pm 1, 0) = 1$ e $f(0, \pm 1) = -1$

si deduce che $(\pm 1, 0)$ sono punti di massimo assoluto e $(0, \pm 1)$ sono punti di minimo assoluto.

