ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 13

ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 3

1.a

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(xy)}{y} & \text{se } y\neq 0\\ 0 & \text{se } y=0\end{cases}\qquad \text{è continua in } \mathbb{R}^2$$

Basta verificare che $\forall x_0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)=f(x_0,0)=0.$$

Si noti che se $(x,y)\to(x_0,0)$ allora $xy\to 0$ e

$$1-\cos(xy)=\frac{1}{2}(xy)^2\cdot(1+o(1))$$

Quindi per $y\neq 0$,

$$f(x,y)=\frac{1-\cos(y)}{y}=\frac{1}{2}\,\frac{x^2y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}(1+o(1))\xrightarrow[y\to 0]{x\to x_0}0.$$

1.b

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{y} & \text{se } y\neq 0\\ x^3 & \text{se } y=0\end{cases}\qquad \text{è continua in } \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):\ x\neq 0,\pm 1\}$$

Basta verificare per quali $x_0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)=f(x_0,0)=x_0^3.$$

Per $(x,y)\to(x_0,0)$ si ha che $xy\to 0$

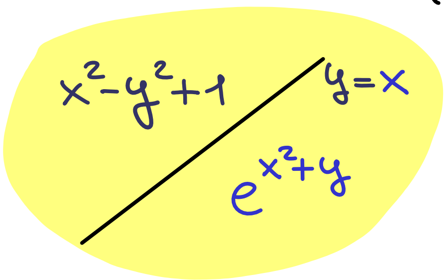
$$\operatorname{sen}(xy)=xy\,(1+o(1)).$$

Quindi per $y\neq 0$

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(xy)}{y}=\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}}(1+o(1))\xrightarrow[y\to 0]{x\to x_0}x_0$$

e la continuità è verificata nei punti in cui $x_0^3=x_0$ ossia $x_0=0,1,-1$.

1.c $f(x,y)=\begin{cases} e^{x^2+y} & \text{se } y<x \\ x^2-y^2+1 & \text{se } y\geq x \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x): x\neq 0,-1\}$



Dato che $(x,y)\to e^{x^2+y}$ e $(x,y)\to x^2-y^2+1$ sono continue in $\mathbb{R}^2$, la continuità di f è verificata in $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x): x\in\mathbb{R}\}$ e nei punti lungo la retta $y=x$ tali che

$$e^{x^2+x}=\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1 \iff x^2+x=0 \iff x=0,-1.$$

2.a $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ Piano tangente in $(1,1)$?

$$f(1,1)=\operatorname{arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},\ \frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) \Rightarrow \nabla f(1,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Piano tangente in $(1,1)$:

$$z=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)+\left(\frac{1}{2}\right)(y-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}.$$

2.b $f(x,y)=\log(\underbrace{|x+y|}_{=-x-y \text{ in un intorno di } (-2,1)}+y^2)$ Piano tangente in $(-2,1)$?

$$f(-2,1)=\log(|-1|+1)=\log(2)$$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{-1}{-x-y+y^2},\ \frac{-1+2y}{-x-y+y^2}\right) \Rightarrow \nabla f(-2,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Piano tangente in $(-2,1)$:

$$z=\log(2)-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(y-1)=\log(2)-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}.$$

3.a $f(x,y)=(1+x+y^2)^3$ $\quad T_2$ in $(0,0)$?

Ricordiamo che $x^\alpha y^\beta = o(x^2+y^2)$ se $\alpha+\beta>2$.
Allora

$$(1+(x+y^2))^3 = 1+3(x+y^2)+3(x+y^2)^2+(x+y^2)^3$$
$$= 1+3x+3x^2+3y^2+o(x^2+y^2)$$

e per l'unicità di T_2,

$$T_2(x,y)=1+3x+3x^2+3y^2.$$

$\nabla=(3,0)$
$H=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$

3.b $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)}$ $\quad T_2$ in $(0,0)$?

$$\frac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)}=(1+xy+o(x^2+y^2))\cdot(1+x+x^2+o(x^2+y^2))\cdot(1+2y+4y^2+o(x^2+y^2))$$
$$=(1+xy+o(x^2+y^2))\cdot(1+x+2y+x^2+2xy+4y^2+o(x^2+y^2))$$
$$=1+x+2y+x^2+3xy+4y^2+o(x^2+y^2).$$

Quindi

$$T_2(x,y)=1+x+2y+x^2+3xy+4y^2.$$

$\nabla=(1,2)$
$H=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 8\end{bmatrix}$

$\boxed{4.a}$ $f(x,y)=x^3-y^3-3x+12y+2$ Punti stazionari?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\nabla f(x,y)=(3x^2-3\,,-3y^2+12)=(0,0)$

$$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix}(1,2)\,,(1,-2)\\(-1,2)\,,(-1,-2)\end{matrix}}$$

Punti stazionari

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

Quindi

$(1,2)$: $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ SELLA

$(-1,2)$: $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ MASSIMO REL.

$(1,-2)$: $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ MINIMO REL.

$(-1,-2)$: $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ SELLA

Non ci sono max/min assoluti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,y)=\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-3x+2)=\pm\infty.$$

$\boxed{4.b}$ $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$ Punti stazionari?

$D=\mathbb{R}^2$, $f\in C^2(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$, f non è derivabile in $(0,0)$

Per $(x,y)\neq(0,0)$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\overset{4}{\cancel{8}}x}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+y^2}}\,,\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+y^2}}\right)=(0,0)$$

Non ci sono punti stazionari!

$(0,0)$ è un punto di minimo assoluto:

$$f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}\geq 0=f(0,0)\quad\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

$\boxed{4.e}$ $f(x,y) = (x^2-y-1)(1-x^2-y^2)$ Punti stazionari?

$$= x^2 - x^4 - x^2y^2 - y + yx^2 + y^3 - 1 + x^2 + y^2$$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\quad = 2x^2 - x^4 - x^2y^2 - y + yx^2 + y^3 - 1 + y^2$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x - 4x^3 - 2xy^2 + 2xy = 2x(2 - 2x^2 - y^2 + y) = 0 \\ f_y(x,y) = -2x^2y - 1 + x^2 + 3y^2 + 2y = x^2(1-2y) + 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 = 2 - y^2 + y \\ (2-y^2+y)(1-2y) + 6y^2 + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

$(3y-1)(y+1) = 0$

$$\boxed{\begin{matrix} (0, \frac{1}{3}) \\ (0,-1) \end{matrix}}$$

$\cancel{2} - y^2 + y - \cancel{4y} + 2y^3 - 2y^2 + 6y^2 + \cancel{4y} - \cancel{2} = 0$

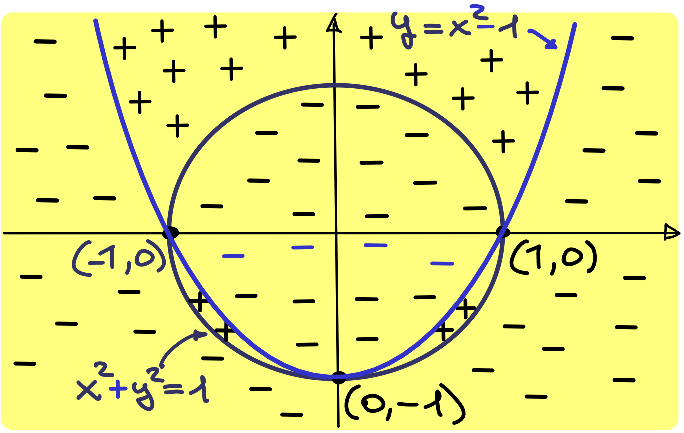
$2y^3 + 3y^2 + y = 0$

$y(2y^2 + 3y + 1) = 0 \qquad y = 0, -1, -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ 2x^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$(1,0)$	$\cancel{(0,-1)}$	$\left(\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2}\right)$
$(-1,0)$	già presente	$\left(-\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2}\right)$

Esaminando il segno di f si trova che



i punti stazionari $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ dove la funzione vale 0 sono tutti punti di SELLA.

Per $(0, \frac{1}{3})$ e $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2}\right)$ calcoliamo la matrice hessiana

$$f_{xx}(x,y) = 4 - 12x^2 - 2y^2 + 2y$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4xy + 2x$$
$$f_{yy}(x,y) = -2x^2 + 6y + 2$$

Così

$$H_f\left(0,\tfrac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{40}{9}^{+} & 0 \\ 0 & 4^{+} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(0,\tfrac{1}{3}\right) \text{ MINIMO RELATIVO}$$

$$H_f\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{8}},-\tfrac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -5 & \pm\sqrt{10} \\ \pm\sqrt{10} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(H)<0,\ \det(H)=\tfrac{5}{4}>0$$
$$\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{8}},-\tfrac{1}{2}\right) \text{ MASSIMO RELATIVO}$$

$\boxed{5.a}$ $f(x,y) = (x-y)^4 - 8(x-y)^2$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = -8(x-y)^2 + o(x^2+y^2)$

da cui $= -8x^2 + 16xy - 8y^2 + o(x^2+y^2)$

$f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$, $H_f(0,0) = 16\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\det(H)=0$

Abbiamo che

$$f(x,y) = \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}\Big(\underbrace{(x-y)^2-8}_{\to -8 \text{ per } (x,y)\to(0,0)}\Big) \leq 0 = f(0,0)$$ in un intorno di $(0,0)$

quindi è <0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO

Segno di f