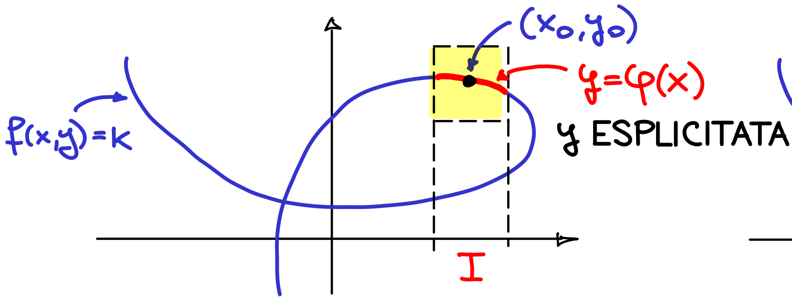
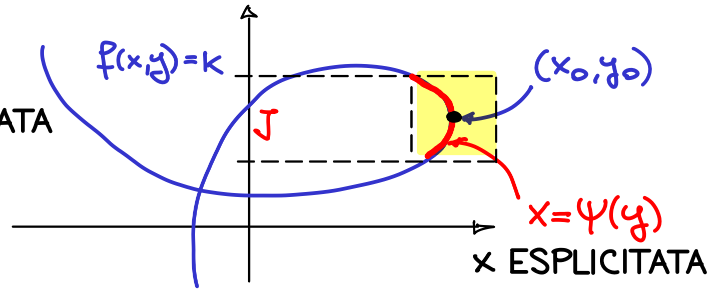
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 12

FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE

Generalmente data una funzione $f(x,y)$, l'equazione $f(x,y)=k$ con $k \in \mathbb{R}$ è soddisfatta dai punti lungo una curva (di livello) contenuta in D.
Fissato un punto (x_0,y_0) di tale curva, in certe ipotesi, l'equazione $f(x,y)=k$ definisce IMPLICITAMENTE una funzione $y=\varphi(x)$ in un intorno I di x_0 oppure una funzione $x=\psi(y)$ in un intorno J di y_0 tali che, rispettivamente

$\forall x \in I \quad f(x,\varphi(x))=k$ $\qquad\qquad$ $\forall y \in J \quad f(\psi(y),y)=k$

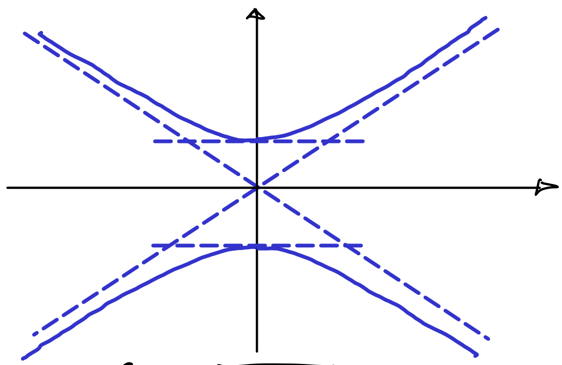




ESEMPIO

- $f(x,y)=y^2-x^2=1$

  $\nabla f(x,y)=(-2x,2y)$



Esplicito la x: $x^2=y^2-1 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{y^2-1} & \text{per } x_0>0 \text{ e } |y_0|>1 \\ x=-\sqrt{y^2-1} & \text{per } x_0<0 \text{ e } |y_0|>1 \end{cases}$

tangente orizzontale

$f_x(0,\pm 1)=0 \Rightarrow$ Non si può esplicitare la x in un intorno di $(0,\pm 1)$

Esplicito la y: $y^2=x^2+1 \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x^2+1} & \text{per } x_0 \in \mathbb{R} \text{ e } y_0 \geq 1 \\ y=-\sqrt{x^2+1} & \text{per } x_0 \in \mathbb{R} \text{ e } y_0 \leq -1 \end{cases}$

tangente mai verticale

$f_y(x,y)=2y \neq 0$ lungo tutta la curva.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DELLE FUNZIONI IMPLICITE O DI DINI)

Sia $f \in C^1(A)$ con A insieme aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$.
Sia $(\vec{x}_0, y) \in A$ tale che $f(\vec{x}_0, y) = 0$.
Se $f_y(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$ allora $\exists\, r, s > 0$ e $\exists$ un'unica funzione

$$\varphi : B_r(\vec{x}_0) \longrightarrow (y_0 - s, y_0 + s)$$

tale che $\varphi(\vec{x}_0) = y_0$ e

$$f(\vec{x}, \varphi(\vec{x})) = 0 \quad \forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0).$$

Inoltre $\varphi \in C^1(B_r(\vec{x}_0))$ e per $j = 1, \dots, n$

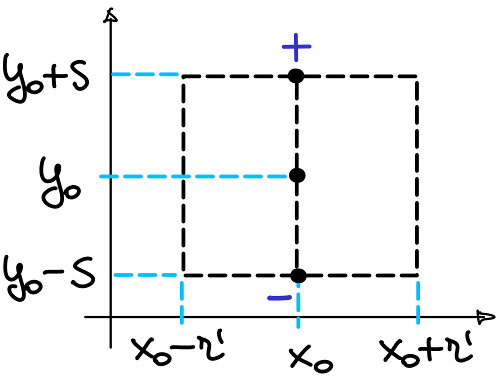
$$\varphi_{x_j}(\vec{x}) = -\frac{f_{x_j}(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))}{f_y(\vec{x}, \varphi(\vec{x}))} \qquad \forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0).$$

dim. Caso $n = 1$. Possiamo supporre che $f_y(x_0, y_0) > 0$.

1) Esistenza di φ.

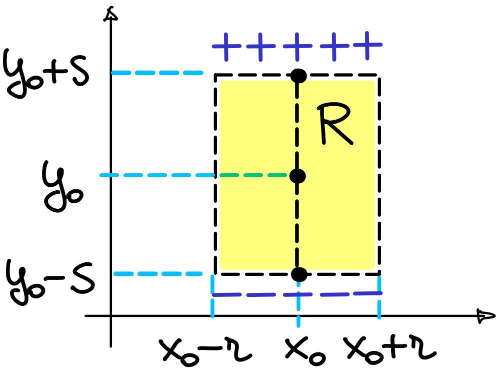
Per la permanenza del segno e la continuità di f_y in (x_0, y_0) $\exists\, r', s > 0$ tali che $f_y(x, y) > 0$ in

$$[x_0 - r', x_0 + r'] \times [y_0 - s, y_0 + s].$$



Quindi la funzione $y \to f(x_0, y)$ è strettamente crescente in $[y_0 - s, y_0 + s]$. Siccome $f(x_0, y_0) = 0$ si ha che

$$f(x_0, y_0 + s) > 0 \ \text{ e } \ f(x_0, y_0 - s) < 0 .$$

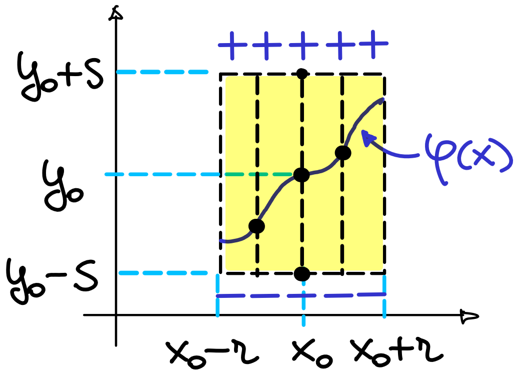


Per la permanenza del segno e la continuità di f in (x_0, y_0+s) e $(x_0, y_0 - s)$ $\exists\, r' \in (0, r)$ tale che

$$f(x, y_0 + s) > 0 \ \text{ e } \ f(x, y_0 - s) < 0$$

$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Sia $R = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s]$



Così $\forall x \in [x_0-r, x_0+r]$ la funzione $y \to f(x,y)$ è strettamente crescente e continua in $[y_0-S, y_0+S]$. Allora per il teorema degli zeri (il segno dei valori agli estremi è discorde) $\exists$ un unico $y \overset{d}{=} \varphi(x)$ tale che $f(x,\varphi(x))=0$. Si noti che $\varphi(x_0)=y_0$.

2) Continuità di φ.

Sia $x\in(x_0-r, x_0+r)$ e sia h tale che $x+h\in(x_0-r,x_0+r)$.
Per il teorema del valor medio $\exists(x_*,y_*)$ lungo il segmento di estremi $(x,\varphi(x)),(x+h,\varphi(x+h))\in R$ tale che

$$0=f(x+h,\varphi(x+h))-f(x,\varphi(x)) \overset{TVM}{=} f_x(x_*,y_*)h+\overbrace{f_y(x_*,y_*)}^{>0}(\varphi(x+h)-\varphi(x))$$

da cui

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=-\frac{f_x(x_*,y_*)}{f_y(x_*,y_*)}\cdot h \quad (*)$$

Per $h\to 0$,

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leqslant\frac{\max_R|f_x(x_*,y_*)|}{\min_R|f_y(x_*,y_*)|}\cdot|h|\to 0 \Rightarrow \varphi \text{ è continua}$$

$\max_R|f_x(x_*,y_*)|$ e $\min_R|f_y(x_*,y_*)|>0$ esistono per il teo. di Weierstrass dato che $f_x, f_y\in C(R)$ e R è compatto.

3) φ è C^1 e vale la formula data.

Per $(*)$, se $h\to 0$ si ha che $x_*\to x$, $y_*\to\varphi(x)$ e

φ è continua

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}}_{\varphi'(x)}\overset{(*)}{=}\lim_{h\to 0}-\frac{f_x(x_*,y_*)}{f_y(x_*,y_*)}=\left(-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}\right)$$

continua per la continuità di f_x, f_y e φ

$\square$

OSSERVAZIONE

Si dimostra che se $f \in C^k(A)$ con $k \geq 1$ allora $\varphi \in C^k(B_r(\vec{x}_0))$.

ESEMPI

- L'equazione $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 7 = 0$ è soddisfatta per $(x_0, y_0) = (1,2)$. Il gradiente è

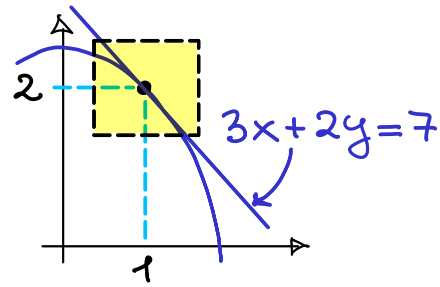
$$\nabla f(x,y) = (6x, 2y).$$

Dato che $f_y(1,2) = 4 \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in un intorno di $x=1$ una funzione $y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(1) = 2$, $f(x, \varphi(x)) = 0$ e

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} = -\frac{6x}{2\varphi(x)} \Rightarrow \varphi'(1) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

La retta tangente a $3x^2 + y^2 - 7 = 0$ in $(1,2)$ è

$$\begin{aligned} y &= \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) \\ &= 2 - \frac{3}{2}(x-1) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow 3x + 2y = 7 \end{aligned}$$



Dato che $f_x(1,2) = 6 \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in un intorno di $y = 2$ una funzione $x = \psi(y)$ tale che $\psi(2) = 1$, $f(\psi(y), y) = 0$ e

$$\psi'(x) = -\frac{f_y(\psi(y),y)}{f_x(\psi(y),y)} = -\frac{2y}{6\psi(y)} \Rightarrow \psi'(2) = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

La retta tangente a $3x^2 + y^2 - 7 = 0$ in $(1,2)$ è

$$x = \psi(2) + \psi'(2)(y-2) = 1 - \frac{2}{3}(y-2) \Rightarrow 3x + 2y = 7.$$

- L'equazione

$$f(x,y)=e^{xy}+2x+3y-1=0$$

vale per $(x,y)=(0,0)$. Gradiente:

$$\nabla f(x,y)=(y\,e^{xy}+2,\ x\,e^{xy}+3).$$

Dato che $f_y(0,0)=3\neq 0$, l'equazione $f(x,y)=0$ definisce in un intorno di $x=0$ una funzione $y=\varphi(x)$ tale che $\varphi(0)=0$, $f(x,\varphi(x))=0$ e

$$\varphi'(x)=-\frac{\varphi(x)e^{x\varphi(x)}+2}{xe^{x\varphi(x)}+3}\implies \varphi'(0)=-\frac{2}{3}.$$

Calcolo di $\varphi''(x)$:

$$\overbrace{\left(\varphi(x)e^{x\varphi(x)}+2\right)}^{f_x(x,\varphi(x))}+\overbrace{\left(xe^{x\varphi(x)}+3\right)}^{f_y(x,\varphi(x))}\cdot\varphi'(x)\overset{\frac{d}{dx}(f(x,\varphi(x)))=0}{=}0$$

allora derivando rispetto a x si ha

$$\begin{aligned}&\varphi'(x)e^{x\varphi(x)}+\varphi(x)e^{x\varphi(x)}(\varphi(x)+x\varphi'(x))\\&+\left(e^{x\varphi(x)}+xe^{x\varphi(x)}(\varphi(x)+x\varphi'(x))\right)\cdot\varphi'(x)\\&+\left(xe^{x\varphi(x)}+3\right)\varphi''(x)=0\end{aligned}$$

e quindi per $x=0$ si ottiene

$$-\frac{2}{3}+0+(1+0)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3\varphi''(0)=0\implies\varphi''(0)=\frac{4}{9}.$$

Anche senza scrivere esplicitamente φ, abbiamo calcolato il polinomio di Taylor T_2 di φ in 0:

$$\begin{aligned}T_2(x)&=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{\varphi''(0)}{2}x^2\\&=0-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^2.\end{aligned}$$

• L'equazione

$$f(x,y,z) = e^z - z^2 - x^3 - y^3 = 0$$ superficie di livello

vale per $(x,y,z) = (1,0,0)$. Gradiente:

$$\nabla f(x,y,z) = (-3x^2, -3y^2, e^z - 2z)$$

e quindi $\nabla f(1,0,0) = (-3,0,1)$.

Visto che $f_x(1,0,0) = -3 \neq 0$ e $f_z(1,0,0) = 1 \neq 0$ è possibile esplicitare localmente vicino a $(1,0,0)$ sia la x che la z.

Esplicitiamo la z: in un intorno U di $(1,0)$ $\exists\ z = \varphi(x,y)$ tale che $\varphi(1,0) = 0$ e

$$\forall (x,y) \in U \quad f(x,y,\varphi(x,y)) = 0.$$

Inoltre

$$\varphi_x(1,0) = -\frac{f_x(1,0,0)}{f_z(1,0,0)} = 3 \ , \quad \varphi_y(1,0) = -\frac{f_y(1,0,0)}{f_z(1,0,0)} = 0.$$

Quindi per $(x,y) \to (1,0)$,

$$\varphi(x,y) = \varphi(1,0) + \varphi_x(1,0)(x-1) + \varphi_y(1,0)\,y + o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)$$

$$= 3(x-1) + o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right).$$

Si noti che $z = 3(x-1)$ è il piano tangente alla superficie di livello

$$e^z - z^2 - x^3 - y^3 = 0$$

nel punto $(1,0,0)$.