ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 11

FORME QUADRATICHE

Sia M una matrice $n \times n$ simmetrica reale.
La funzione $\mathbb{R}^n \ni \vec{v} \to \langle M\vec{v}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$
si dice FORMA QUADRATICA associata a M.

M si dice DEFINITA POSITIVA se
$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \quad \langle M\vec{v}, \vec{v} \rangle > 0.$$
M si dice DEFINITA NEGATIVA se
$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \quad \langle M\vec{v}, \vec{v} \rangle < 0.$$
M si dice INDEFINITA se
$$\exists \vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} : \langle M\vec{v_1}, \vec{v_1} \rangle > 0 \text{ e } \langle M\vec{v_2}, \vec{v_2} \rangle < 0.$$

TEOREMA

Sia M una matrice $n \times n$ simmetrica reale e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori ripetuti con le loro molteplicità, allora

1) M è definita positiva $\iff$ $\lambda_j > 0$ per $j = 1, \dots, n$
2) M è definita negativa $\iff$ $\lambda_j < 0$ per $j = 1, \dots, n$
3) M è indefinita $\iff$ $\exists \lambda_i, \lambda_k : \lambda_i > 0$ e $\lambda_k < 0$

dim. Dimostriamo solo 1).
M è simmetrica e dunque $\exists$ una base ortonormale di autovettori $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}$ tali che $M\vec{v_j} = \lambda_j \vec{v_j}$ $j = 1, \dots, n$.
($\Longrightarrow$) Per $j = 1, \dots, n$,
$$0 < \langle M\vec{v_j}, \vec{v_j} \rangle = \langle \lambda_j \vec{v_j}, \vec{v_j} \rangle = \lambda_j \underbrace{\|\vec{v_j}\|^2}_{=1} = \lambda_j.$$
Quindi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono positivi.

$(\Leftarrow)$ Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ $\exists\, \alpha_j \in \mathbb{R}$ $j = 1, \dots, n$ non tutti nulli tali che

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{v}_j$$

allora

$$\begin{aligned}
\langle M\vec{v}, \vec{v} \rangle &= \langle M \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{v}_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v}_k \rangle \\
\text{linearità} \longrightarrow &= \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j M \vec{v}_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v}_k \rangle \\
M\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j \longrightarrow &= \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j \vec{v}_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v}_k \rangle \\
\text{bilinearità} \longrightarrow &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \lambda_j \underbrace{\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle}_{} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad \text{ortonormalità} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_j^2}_{\geq 0} \underbrace{\lambda_j}_{> 0} > 0 \quad \text{almeno uno degli } \alpha_j^2 > 0
\end{aligned}$$

$\square$

OSSERVAZIONE

Nel caso $n = 2$, con $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ gli autovalori λ_1, λ_2 si trovano risolvendo l'equazione caratteristica

$$0 = \det(M - \lambda I) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - \overbrace{(a + c)}^{\text{TRACCIA } tr(M)}\lambda + \overbrace{ac - b^2}^{\det(M)}.$$

Dato che $tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\det(M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ il segno di λ_1, λ_2 si può ottenere anche senza calcolare esplicitamente λ_1 e λ_2:

$$M \text{ è definita positiva} \iff \begin{cases} \det(M) > 0 \\ tr(M) > 0 \end{cases}$$

$$M \text{ è definita negativa} \iff \begin{cases} \det(M) > 0 \\ tr(M) < 0 \end{cases}$$

$$M \text{ è indefinita} \iff \det(M) < 0$$

Il seguente enunciato fornisce una condizione sufficiente per riconoscere se un punto stazionario interno è un punto di massimo/minimo/sella.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $\vec{x}_0$ punto interno di D.
Se f è C^2 in un intorno di $\vec{x}_0$ e $\vec{x}_0$ è un punto stazionario di f allora

1) $H_f(\vec{x}_0)$ è definita positiva $\Longrightarrow$ $\vec{x}_0$ è un punto di minimo relativo

2) $H_f(\vec{x}_0)$ è definita negativa $\Longrightarrow$ $\vec{x}_0$ è un punto di massimo relativo

3) $H_f(\vec{x}_0)$ è indefinita $\Longrightarrow$ $\vec{x}_0$ è un punto di sella

dim. Dimostriamo solo 1).
Per la formula di Taylor di ordine 2 per $\vec{x} \to \vec{x}_0$

$$f(\vec{x}) = T_{2,\vec{x}_0}(\vec{x}) + o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2)$$

dove

$$T_{2,\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \overbrace{\nabla f(\vec{x}_0)}^{=\vec{0}}, \vec{x}-\vec{x}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0), \vec{x}-\vec{x}_0 \rangle$$

e quindi

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \langle H_f(\vec{x}_0)\vec{v}, \vec{v} \rangle + o(1) \right) \quad (*)$$

dove $\vec{v} = \dfrac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}$ ha norma 1.

Consideriamo la forma quadratica

$$\vec{v} \xrightarrow{\varphi} \langle H_f(\vec{x}_0)\vec{v}, \vec{v} \rangle .$$

simmetrica per Schwarz

φ è continua e positiva nel compatto

$$S=\{\vec{v}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{v}\|=1\}$$ sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ centrata in $\vec{0}$

e per il teorema di Weierstrass

$$\min_{\vec{v}\in S}\varphi(\vec{v})=m>0$$ φ è definita positiva

Così da (*)

$$f(\vec{x})\geq f(\vec{x}_0)+\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2\cdot\Big(\overbrace{\frac{m}{2}}^{>0}+\overbrace{o(1)}^{\to 0 \text{ per } \vec{x}\to\vec{x}_0}\Big)\geq f(\vec{x}_0)$$

Per la permanenza del segno

$\exists r>0 : \forall \vec{x}\in B_r(\vec{x}_0)$ $\left(\frac{m}{2}+o(1)\right)>0$

ossia $\vec{x}_0$ è un punto minimo relativo. □

OSSERVAZIONE

Se $\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}$ e $\det H_f(\vec{x}_0)=0$ è necessaria una ulteriore analisi per determinare la natura del punto stazionario $\vec{x}_0$.

ESEMPI

- $f(x,y)=(x-1)(x^2-y^2)=x^3-x^2+y^2-xy^2\in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Gradiente:

$$\nabla f(x,y)=(3x^2-2x-y^2,\,2y-2yx).$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases}3x^2-2x-y^2=0\\ 2y(1-x)=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=0\\ 3x^2-2x=0\end{cases}\cup\begin{cases}x=1\\ 3-2-y^2=0\end{cases}$$

$y=0$, $x=1$

$x(3x-2)=0$ $\qquad$ $y^2=1$

$(0,0),\left(\frac{2}{3},0\right)$ $\qquad$ $(1,1),(1,-1)$

Hessiano

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 6x-2 & -2y \\ -2y & 2(1-x) \end{bmatrix}$$

Quindi

autovalori $-2,2$

$$H_f(0,0)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow (0,0) \text{ è un punto di sella}$$

autovalori $2,\frac{2}{3}$

$$H_f(\tfrac{2}{3},0)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Longrightarrow (\tfrac{2}{3},0) \text{ è un minimo relativo}$$

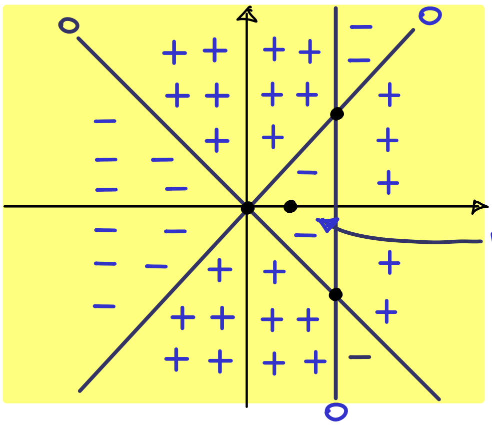
$$H_f(1,1)=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad tr(H)=4>0,\quad det(H)=-(-2)^2=-4<0$$
$$\Longrightarrow (1,1) \text{ è un punto di sella}$$

$$H_f(1,-1)=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad tr(H)=4>0,\quad det(H)=-(2)^2=-4<0$$
$$\Longrightarrow (1,-1) \text{ è un punto di sella}$$

Qualche ulteriore osservazione.

Segno di

$f(x,y)=(x-1)(x^2-y^2)$



$(\frac{2}{3},0)$ non è un punto di minimo assoluto perché restringendo f a $y=0$ si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^3-x^2) = \pm\infty \Longrightarrow \begin{array}{l} \sup_{\mathbb{R}^2} f=+\infty \\ \inf_{\mathbb{R}^2} f=-\infty \end{array}$$

Invece la funzione $|f(x,y)|$ ha infiniti punti di minimo assoluto ossia tutti i punti delle rette $x=1$, $y=\pm x$, un massimo relativo in $(\frac{2}{3},0)$ e nessun massimo assoluto.

- $f(x,y) = x^2 + y^n \in C^2(\mathbb{R}^2)$ con $n \geq 3$.

Gradiente: $\nabla f(x,y) = (2x, ny^{n-1}) = (0,0)$
e quindi l'unico punto stazionario è $(0,0)$.

Hessiano:
$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(H) = 0 \ ?$$

Per determinare la natura di $(0,0)$ si nota che per n pari
$$f(x,y) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^n}_{\geq 0} \geq f(0,0) = 0$$
e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto.

Se invece n è dispari
$$f(0,y) = y^n = \begin{cases} > 0 & \text{se } y > 0 \\ < 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$
e quindi $(0,0)$ è un punto di sella in quanto $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$

Segno di $f(x,y) = x^2 + y^3$