ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 9

Le regole di derivazione parziale per somma, prodotto e rapporto sono sostanzialmente le stesse anche per $n>1$: se f e g sono derivabili allora

$$\nabla(\alpha f+\beta g)=\alpha\nabla f+\beta\nabla g \qquad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\nabla(f\cdot g)=g\nabla f+f\nabla g, \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(g\nabla f-f\nabla g)$$

Per la composizione la regola di derivazione è la seguente: sia $f:D\to\mathbb{R}$ derivabile in $D\subseteq\mathbb{R}^n$ e siano $g_1,\dots,g_n:U\to\mathbb{R}$ derivabili in $U\subseteq\mathbb{R}^m$ tali che la funzione composta $h:U\to\mathbb{R}$

$$\vec{u}\xrightarrow{h} f(g_1(\vec{u}),\dots,g_n(\vec{u}))=f(\vec{g}(\vec{u}))$$

$(g_1,\dots,g_n)$

sia ben definita. Allora

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}(\vec{u})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(\vec{u}),\dots,g_n(\vec{u}))\cdot\frac{\partial g_i(\vec{u})}{\partial u_j}$$

$$=\left\langle\nabla f(\vec{g}(\vec{u})),\ \frac{\partial\vec{g}(\vec{u})}{\partial u_j}\right\rangle \quad \text{per } j=1,\dots,m.$$

ESEMPIO

- Se $f(x,y)=xy$ e $x(\rho,\theta)=\rho\cos\theta$, $y(\rho,\theta)=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ allora la composizione è

$$h(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)=\rho^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e le sue derivate parziali sono

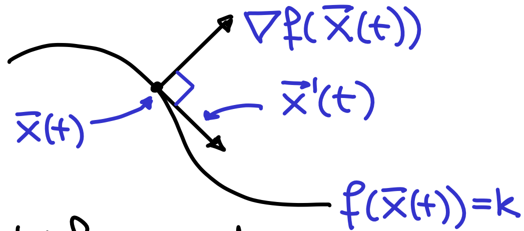
$$\frac{\partial h}{\partial\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}=y\cos\theta+x\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$=2\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial h}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=y(-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)+x(\rho\cos\theta)$$
$$=\rho^2(-\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta)$$

OSSERVAZIONE

Se in un insieme di livello $\{\vec{x} \in D : f(\vec{x}) = k\}$ è contenuta una curva descritta in forma parametrica come $[a,b] \ni t \longrightarrow \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$

ossia $\forall t \in [a,b] \quad f(\vec{x}(t)) = k \quad (*)$



e $f, \vec{x}$ sono derivabili, allora applicando la regola di derivazione delle funzioni composte alla $(*)$ si ottiene

vettore tangente alla curva

$$\frac{d}{dt}\left(f(\vec{x}(t))\right) = \langle \nabla f(\vec{x}(t)), \vec{x}\,'(t) \rangle = 0$$

← derivata della costante k

ossia il gradiente di f è ortogonale in ogni punto alla curva.

ESEMPIO

- Consideriamo $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in $D = \mathbb{R}^2$.

  f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} .$$

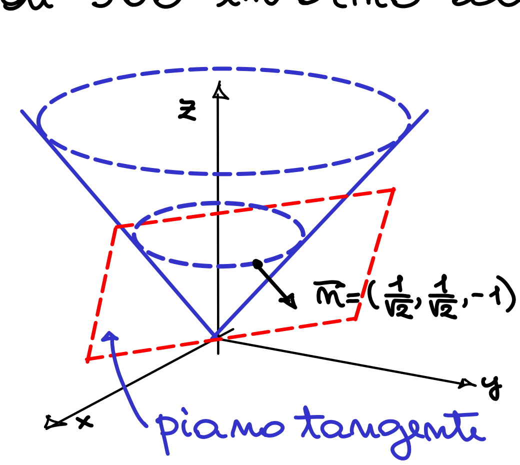
  In $(0,0)$ f non è differenziabile:

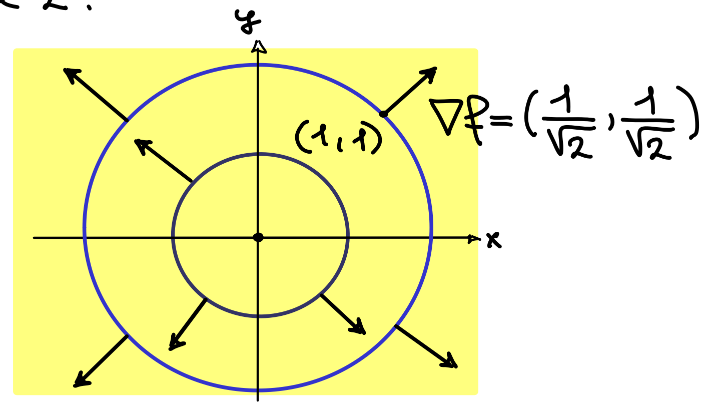
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} = \nexists$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} = \nexists$$

Il grafico di f è un cono: è la rotazione completa del grafico della semiretta $z=x$ per $x \geq 0$ nel piano $y=0$ intorno all'asse z.

In generale il grafico $z=f(x,y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ è il grafico di $z=\varphi(x)$ per $x \geq 0$ nel piano $y=0$ ruotato di $360°$ intorno all'asse z.





Le curve di livello sono le circonferenze $x^2+y^2=k^2$

Calcolo del piano tangente in $(1,1,f(1,1))=(1,1,\sqrt{2})$

$$z=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$
$$=\sqrt{2}+\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

Si noti che riscrivendo il piano tangente come

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-z=0$$

il vettore $\overline{n}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$ è ortogonale al piano e al grafico di f nel punto dato.

OSSERVAZIONE

Si ricorda che dato un piano

$$ax+by+cz+d=0$$

allora $\overline{n}=(a,b,c)$ è un vettore ortogonale al piano.

Siano $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ punti in $\mathbb{R}^n$ allora

$$[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = \{ t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2 \ : t \in [0,1] \}$$

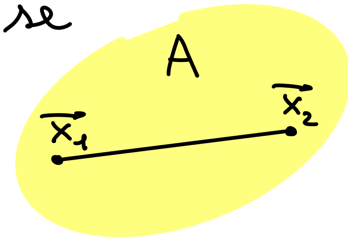
e

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \{ t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2 \ : t \in (0,1) \}$$

indicano rispettivamente il SEGMENTO CHIUSO e il SEGMENTO APERTO che uniscono $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CONVESSO se

$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A \quad [\vec{x}_1, \vec{x}_2] \subseteq A.$$



$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DEL VALORE MEDIO)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso e sia f una funzione differenziabile in A allora $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A$

$$\exists \vec{x}_* \in (\vec{x}_1, \vec{x}_2) : \ f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2) = \langle \nabla f(\vec{x}_*), \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle.$$

dim. Definiamo la funzione

$$[0,1] \ni t \to \varphi(t) = f(t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2).$$

Per composizione φ è derivabile in $[0,1]$ e per il teorema di Lagrange $\exists \, t_* \in (0,1)$ tale che

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_*)(1-0) \qquad (*)$$

dove $\varphi(1) = f(\vec{x}_1)$ e $\varphi(0) = f(\vec{x}_2)$ e per $t \in [0,1]$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left(f(t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2)\right)$$

derivata funzione composta

$$= \left\langle \nabla f(t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2), \frac{d}{dt}(t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2) \right\rangle$$

$$= \langle \nabla f(t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2), \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \rangle.$$

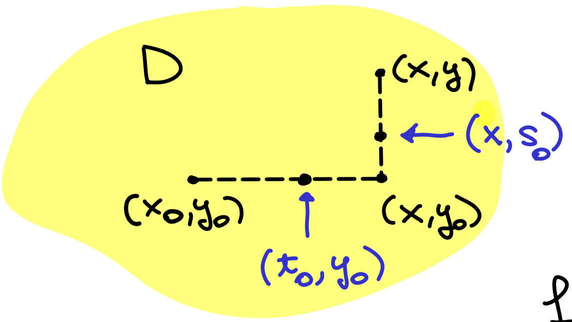
Per $t = t_*$ e $\vec{x}_* = t_*\vec{x}_1 + (1-t_*)\vec{x}_2$ da $(*)$ segue la tesi. □

OSSERVAZIONE Se f è identicamente $\vec{0}$ in A insieme aperto e convesso allora f è costante.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CONDIZIONE SUFFICIENTE DI DIFFERENZIABILITÀ)

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{x_0}$ punto interno di D. Se f è derivabile in un intorno di $\vec{0}$ e le derivate parziali di f sono continue in $\vec{x_0}$ allora f è differenziabile in $\vec{x_0}$.

dim. Caso $n = 2$. Sia (x,y) un punto in $B_r(\vec{x_0}) \subseteq D$



Per il teorema di Lagrange applicato alla funzione

$$t \to f(t, y_0)$$

in $[x_0, x]$, $\exists\, t_0 \in (x_0, x)$:

$$f(x,y_0) - f(x_0,y_0) = f_x(t_0,y_0)\cdot(x-x_0) \quad (*).$$

Ancora per il teorema di Lagrange applicato alla funzione $s \to f(x,s)$ in $[y_0, y]$, $\exists\, s_0 \in (y_0, y)$:

$$f(x,y) - f(x,y_0) = f_y(x,s_0)\cdot(y-y_0) \quad (**).$$

Allora per $(**)$ e $(*)$, se $(x,y) \to (x_0,y_0)$ si ha che $t_0 \to x_0$, $s_0 \to y_0$ e

$$\frac{f(x,y)\overset{\mp f(x,y_0)}{} - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{1/2}}$$

$$= \overbrace{\left(f_x(t_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\right)}^{\to 0 \text{ per continuità di } f_x} \cdot \underbrace{\frac{(x-x_0)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{1/2}}}_{\text{limitato } |\cdot| \le 1} + \overbrace{\left(f_y(x,s_0) - f_y(x_0,y_0)\right)}^{\to 0 \text{ per continuità di } f_y} \cdot \underbrace{\frac{(y-y_0)}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^{1/2}}}_{\text{limitato } |\cdot| \le 1}$$

$\to 0$ ossia f è differenziabile in (x_0,y_0). $\square$