ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 7

TEOREMA (WEIERSTRASS)

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è COMPATTO (chiuso e limitato) e f è continua in A allora f ha almeno un punto di massimo $\vec{x}_{max} \in A$ e ha almeno un punto di minimo $\vec{x}_{min} \in A$ ossia

$$\forall \vec{x} \in A, \quad f(\vec{x}_{min}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_{max}).$$

dim. Esistenza di $\vec{x}_{max}$ (simile per $\vec{x}_{min}$).
Sia $M = \sup_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Allora per le proprietà del sup $\exists \{\vec{x}_k\}$ successione in A tale che

$$\lim_{k \to \infty} f(\vec{x}_k) = M \quad (*).$$

Dato che A è limitato, $\{\vec{x}_k\}$ è limitata e per BW ammette una sottosuccessione convergente

$$\lim_{j \to \infty} \vec{x}_{k_j} = \vec{x}_{max}$$

Il punto $\vec{x}_{max} \in A$ perché A è chiuso.
Allora per la continuità di f in $\vec{x}_{max}$,

$$\lim_{j \to \infty} f(\vec{x}_{k_j}) = f(\vec{x}_{max})$$

e dunque per $(*)$ $f(\vec{x}_{max}) = M$ (e $M \in \mathbb{R}$).

Infine, dato che $M = \sup_{\vec{x} \in A} f(\vec{x})$,

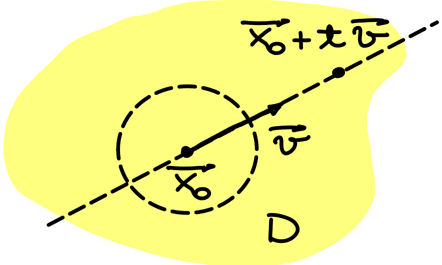
$$\forall \vec{x} \in A, \quad f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_{max}) = M. \qquad \square$$

DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $\vec{x}_0$ un punto interno di D e sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\vec{v}\| = 1$.

La DERIVATA DIREZIONALE di f rispetto a $\vec{v}$ in $\vec{x}_0$ è

$$(D_{\vec{v}} f)(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$



Nel caso in cui $\vec{v} = \vec{e}_j$ (elemento della base canonica) la corrispondente derivata direzionale si dice DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO ALLA VARIABILE x_j in $\vec{x}_0$

$$D_{\vec{e}_j} f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = f_{x_j}(\vec{x}_0)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t e_j) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

cambia solo la j-sima coordinata

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f((\vec{x}_0)_1, (\vec{x}_0)_2, \dots, (\vec{x}_0)_j + t, \dots, (\vec{x}_0)_n) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Se in $\vec{x}_0$ esistono le derivate parziali di f rispetto a tutte le n variabili allora f si dice DERIVABILE in $\vec{x}_0$ e il vettore le cui componenti sono le n derivate parziali si dice GRADIENTE di f in $\vec{x}_0$

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right) \in \mathbb{R}^n$$

OSSERVAZIONE

In precedenza abbiamo notato che

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

e quindi la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

non è continua in $(0,0)$. D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overset{=0}{f(t,0)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overset{=0}{f(0,t)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{t} = 0$$

Ossia f è derivabile in $(0,0)$ con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Quindi per $n>1$, derivabilità $\not\Rightarrow$ continuità.

OSSERVAZIONE

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ si calcola con le "solite" regole di derivazione considerando costanti le variabili x_k per $k\neq j$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $f(x,y) = x^2 e^{x+2y}$, $P_0 = (2,-1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{x+2y} + x^2 e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{x+2y} \cdot 2$$

$$\nabla f(2,-1) = (4+4, 4\cdot 2) = (8,8).$$

- $f(x,y,z) = \dfrac{\log(x^2+y)}{2z+\sqrt{y}}$, $\quad P_0=(1,1,0)$

punto interno di D: $\begin{cases} x^2+y>0 \\ 2z+\sqrt{y}\neq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{2z+\sqrt{y}}\cdot\frac{2x}{x^2+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y}\cdot\frac{1}{2z+\sqrt{y}} + \log(x^2+y)\cdot\left(-\frac{1}{(2z+\sqrt{y})^2}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{\log(x^2+y)}{(2z+\sqrt{y})^2}\cdot 2$$

$$\nabla f(1,1,0) = \left(1, \frac{1-\log(2)}{2}, -2\log(2)\right)$$

Sia $f: D\to\mathbb{R}$ con $D\subseteq\mathbb{R}^n$, sia $\vec{x}_0$ punto interno di D.
Si dice che f è DIFFERENZIABILE in $\vec{x}_0$ se $\exists\, \vec{a}\in\mathbb{R}^n$ tale che per $\vec{x}\to\vec{x}_0$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle\vec{a}, \vec{x}-\vec{x}_0\rangle + o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|).$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

Sia $f: D\to\mathbb{R}$ con $D\subseteq\mathbb{R}^n$, sia $\vec{x}_0$ punto interno di D.
Se f è differenziabile in $\vec{x}_0$ allora

1) f è continua in $\vec{x}_0$;
2) f è derivabile in $\vec{x}_0$ e $\vec{a} = \nabla f(\vec{x}_0)$;
3) Esistono le derivate in $\vec{x}_0$ in ogni direzione e
$$\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{v}\|=1, \quad D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = \langle\nabla f(\vec{x}_0), \vec{v}\rangle .$$

dim.

1) Per $\vec{x}\to\vec{x}_0$,
$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\langle\vec{a}, \vec{x}-\vec{x}_0\rangle}_{\to 0} + \underbrace{o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|)}_{\to 0} \to f(\vec{x}_0).$$

$$|\langle\vec{a}, \vec{x}-\vec{x}_0\rangle| \underset{CS}{\leq} \|\vec{a}\|\,\|\vec{x}-\vec{x}_0\| \to 0$$

2) Sia $1 \leq j \leq n$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_j) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

linearità

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\langle \vec{a}, t\vec{e}_j \rangle + o(\|t e_j\|)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{\cancel{t}(\vec{a})_j}{\cancel{t}} + \underbrace{\frac{o(|t|)}{t}}_{\to 0} \right) = (\vec{a})_j .$$

Quindi esistono le derivate parziali e $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{a}$.

3) $$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

$$\overset{2)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\langle \nabla f(\vec{x}_0), t\vec{v} \rangle + o(\|t\vec{v}\|)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{\cancel{t}\langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle}{\cancel{t}} + \underbrace{\frac{o(|t|)}{t}}_{\to 0} \right)$$

$$= \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle .$$

$\square$

OSSERVAZIONE

Se f è differenziabile in $\vec{x}_0$, per $\vec{x} \to \vec{x}_0$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

ossia la funzione $\vec{x} \to f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$ rappresenta la "migliore" approssimazione lineare di f in un intorno di $\vec{x}_0$.

Per analogia al caso $n=1$ dove

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

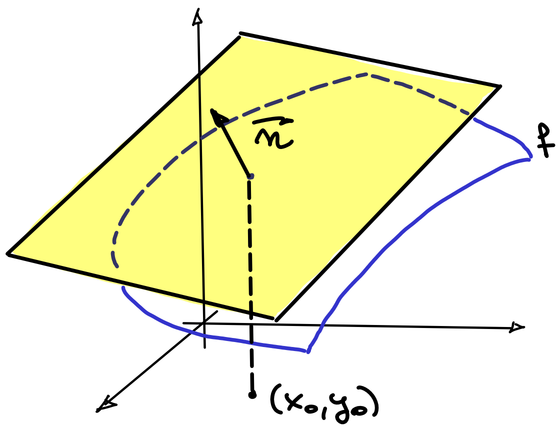
e

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, per $n=2$

$$z = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0)\vec{e}_1 + (y-y_0)\vec{e}_2 \rangle$$
$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

è l'equazione del PIANO TANGENTE al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.



Se $z_0 = f(x_0,y_0)$ allora si ha

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + 1\cdot(z-z_0) = 0$$

ossia

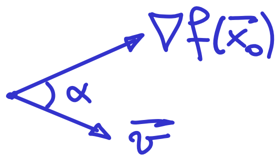
$$\langle \vec{n}, (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$$

dove $\vec{n} = (-\nabla f(x_0,y_0), 1)$ è ortogonale al piano tangente. Si noti che il piano tangente è orizzontale se $\nabla f(x_0,y_0) = \vec{0}$.

OSSERVAZIONE

La derivata direzionale $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$ è una misura di come varia f "vicino" a $\vec{x}_0$ lungo la direzione $\vec{v}$. Quindi se f è differenziabile in $\vec{x}_0$ e $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ allora la relazione

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \cdot \cos(\alpha)$$



dice che tale variazione è massima per $\alpha = 0$ ossia quando $\vec{v}$ punta nella stessa direzione di $\nabla f(\vec{x}_0)$.