

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 4

ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 1

1.a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} \quad \text{DIVERGE A } +\infty$$

$$\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k \sqrt[k]{k}} \sim \frac{1}{k}$$

Per il confronto asintotico dato che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ anche la serie data diverge.

1.b

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\sin(\cos(k)))^k \quad \text{CONVERGE}$$

Dato che $|\sin(\cos(k))| \leq \sin(1) < 1$, per confronto con la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} (\sin(1))^k$ che è convergente, la serie data è assolutamente convergente e quindi anche convergente.

1.c

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{arctg}(e^{-k}) \quad \text{CONVERGE}$$

Abbiamo che $\cos(\pi k) = (-1)^k$ e $\operatorname{arctg}(e^{-k})$ decresce a 0 (si noti che $\operatorname{arctg}(x)$ è crescente e e^{-x} è decrescente) e dunque la serie converge per Leibniz.

1.d

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(k^2+1)} \quad \text{DIVERGE A } +\infty$$

$$\frac{1}{k \log(k^2+1)} \sim \frac{1}{k \log(k^2)} = \frac{1}{2k \log(k)}$$

Dato che $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log(k)} = +\infty$ ($\alpha=1$ e $\beta=1$) per confronto asintotico anche la serie data diverge a $+\infty$.

1.e $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(k))^{\log(k)}} \quad \text{CONVERGE}$

Notiamo che

$$(\log(k))^{\log(k)} \stackrel{a^b = \exp(b \log(a))}{=} \exp(\log(k) \cdot \log(\log(k))) \rightarrow +\infty$$

mentre $k^\alpha = \exp(\alpha \log(k))$. Quindi α numero fisso

$$\frac{a_k}{1/k^2} = \frac{k^2}{(\log(k))^{\log(k)}} = \exp(2\log(k) - \log(k)\log(\log(k))) \rightarrow 0.$$

$$= \log(k)(2 - \log(\log(k))) \rightarrow -\infty$$

Così per il confronto asintotico, dato che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, anche la serie data converge.

1.g $\sum_{k=1}^{\infty} k^k e^{-k^2} \quad \text{CONVERGE}$

Si ha che $\sqrt[k]{a_k} = k \cdot e^{-k^{2/k}} = \frac{k}{e^{k^{1/k}}} \rightarrow 0 < 1$ e quindi la serie converge per il criterio della radice.

1.i $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1}) \quad \text{CONVERGE}$

$$a_k = (\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1}) \cdot \frac{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}}{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}}$$

$$= \frac{k^3+1 - k^3+1}{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}} \sim \frac{2}{2k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}} \quad \text{Dato che } 3/2 > 1 \text{ converge per confronto asintotico}$$

In alternativa

$$a_k = k^{3/2} \left(\left(1 + \frac{1}{k^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{1}{k^3}\right)^{1/2} \right) \stackrel{(1+x)^{1/2} \sim 1 + \frac{x}{2} \text{ per } x \rightarrow 0}{\sim} k^{3/2} \left(1 + \frac{1/2}{k^3} - \left(1 - \frac{1/2}{k^3} \right) \right)$$

$$\sim k^{3/2} \cdot \frac{1}{k^3} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

1.j

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}}}{k!} \quad \text{CONVERGE}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+1)^{\sqrt{k+1}}}{\cancel{(k+1)!}^{k+1}} \cdot \frac{\cancel{k!}^1}{k^{\sqrt{k}}} = \frac{1}{k+1} \exp(\underbrace{\sqrt{k+1} \log(k+1)}_{\parallel \sqrt{k} \sqrt{1+\frac{1}{k}} (\log(k) + \log(1+\frac{1}{k}))} - \sqrt{k} \log(k)) \\ &= \frac{1}{k+1} \exp(o(1)) \rightarrow 0 < 1 \quad = \sqrt{k} \log(k) + \frac{\log(k)}{2\sqrt{k}} (1+o(1)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Converge per il criterio del rapporto.

1.k

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k!)}{k^3} \quad \text{CONVERGE}$$

Notiamo che $\log(k) \leq \log(k) \leq \log(k)$

$$\log(k!) = \log(1) + \log(2) + \dots + \log(k) \leq k \log(k).$$

Quindi:

$$\frac{\log(k!)}{k^3} \leq \frac{\cancel{k}^1 \log(k)}{k^{3-1}} = \frac{1}{k^2 \log^{-1}(k)} \quad \alpha=2, \beta=-1 \text{ converge!}$$

Per confronto la serie data è convergente.

1.l

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(k)}} \quad \text{DIVERGE A } +\infty$$

Si ha che $2^{\log(k)} = \exp(\log(k) \cdot \log(2)) = k^{\log(2)}$

Dato che $\log(2) < 1$ allora la serie diverge.

2.a $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2}{k^5+3}}_{a_k} \underbrace{(2x-1)^k}_z$ CONVERGE PER $x \in [0,1]$.

Studiamo la serie di potenze $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$.

Centro 0. Raggio di convergenza:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^5+3} \cdot \frac{k^5+3}{k^2} \sim \frac{k^7}{k^7} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

Estremi: per $z = \pm 1$

$$\left| \frac{k^2}{k^5+3} (\pm 1)^k \right| = \frac{k^2}{k^5+3} \sim \frac{1}{k^3} \quad \text{la serie converge.}$$

Quindi la serie converge per $z \in [-1,1]$ ossia per $-1 \leq 2x-1 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0,1]$.

2.b $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k^{3x}+k}$ CONVERGE PER $x \in \mathbb{R}$.

Proviamo ad applicare Leibniz. $a_k \rightarrow 0$?

$$a_k = \frac{\sqrt{k}}{k^{3x}+k} = \frac{1}{k^{3x-\frac{1}{2}}+\sqrt{k}} \sim \begin{cases} \frac{1}{k^{3x-\frac{1}{2}}} & \text{se } 3x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{k}} & \text{se } 3x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{se } 3x < 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in ogni caso} \\ a_k \rightarrow 0 \end{array}$$

a_k è definitivamente decrescente?

Basta verificare che $f(k) = k^t + \sqrt{k}$ con $t = 3x - \frac{1}{2}$ è definitivamente crescente

$$f'(k) = t k^{t-1} + \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{(2tk^{t-\frac{1}{2}} + 1)}{2\sqrt{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } t > \frac{1}{2} \\ 2 & \text{se } t = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

in ogni caso > 0

Quindi la serie converge $\forall t \in \mathbb{R}$ ossia $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k - 2 \cdot 5^k}{20^{k-1}} = \frac{5}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k - 2 \cdot 5^k}{20^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{20}\right)^{k-1} - 2 \cdot 5 \left(\frac{5}{20}\right)^{k-1} \right)$$

$$= 12 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} - 10 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{12}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{10}{1 - \frac{1}{4}} = 15 - \frac{40}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1$$