

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 3

SERIE DI POTENZE

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

La SERIE DI POTENZE di coefficienti $\{a_k\}$ e centro x_0 è la funzione

$$x \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

definita nell'insieme D di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie è convergente. D è detto DOMINIO DI CONVERGENZA.

x_0 sta sempre in D

ESEMPI

• $\sum_{k=k_0}^{\infty} (x-x_0)^k = (x-x_0)^{k_0} \sum_{j=0}^{\infty} (x-x_0)^j = \frac{(x-x_0)^{k_0}}{1-(x-x_0)}$ per $x \in D$

serie geometrica

dove $D = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < 1\} = (x_0-1, x_0+1)$.

• $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k = 1$ per $x \in D = \{0\}$ perchè se $x \neq 0$ allora $k! x^k \neq 0$.

TEOREMA

Sia $R = \sup_{x \in D} |x-x_0| \in [0, +\infty]$ detto RAGGIO DI CONVERGENZA

della serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ di dominio D .

Allora la serie converge (assolutamente) se $|x-x_0| < R$ e non converge se $|x-x_0| > R$ ossia

se $R = +\infty$ allora $D = \mathbb{R}$

se $R < +\infty$ allora $(x_0-R, x_0+R) \subseteq D \subseteq [x_0-R, x_0+R]$.

Agli estremi $x_0 \pm R$ il comportamento della serie va stabilito a parte.

TEOREMA

Se 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$ oppure 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L$ allora la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ ha raggio di convergenza $R = \frac{1}{L}$. ($R=0$ se $L=+\infty$ e $R=+\infty$ se $L=0^+$)

dim. 1) Basta applicare il criterio della radice

$$\sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x-x_0| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} L \cdot |x-x_0| \begin{cases} < 1 & \text{converge} \\ > 1 & \text{non converge} \end{cases}$$

$|x-x_0| < \frac{1}{L} = R$
 $|x-x_0| > \frac{1}{L} = R$

2) Si applica il criterio del rapporto. □

ESEMPI

• $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ D?

Si ha che $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = 0 \Rightarrow R = +\infty$.

Quindi $D = \mathbb{R}$.

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} (x+2)^k$ D?

Si ha che $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)^2}{(2k+3)^2} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$.

Quindi $\overset{(-2-1, -2+1)}{\curvearrowright} (-3, -1) \subseteq D \subseteq [-3, -1]$.

Per $x = -3$, $\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} (-3+2)^k = \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1/4}{k^2}$ converge $-3 \in D$

Estremi?

Per $x = -1$, $\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} (-1+2)^k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ converge per Leibniz $-1 \in D$

In conclusione $D = [-3, -1]$.

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k 2^k} \quad D?$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k 2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{1/k} \cdot 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow R=2 \quad \begin{matrix} (1-2, 1+2) \\ \swarrow \\ (-1, 3) \end{matrix} \subseteq D \subseteq [-1, 3].$$

Estremi? Per $x=3$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \Rightarrow 3 \notin D$

Per $x=-1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ converge per $\Rightarrow -1 \in D$
Leibniz

In conclusione $D = [-1, 3)$.

TEOREMA

Sia $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ allora $f \in C^{\infty}(x_0-R, x_0+R)$ e

1) $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE

esistono le derivate di ogni ordine e sono continue

2) $\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$ INTEGRAZIONE TERMINE A TERMINE

OSSERVAZIONE Derivando n volte si ha

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1) a_k \underbrace{(x-x_0)^{k-n}}_{x=x_0} \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Le $x=x_0$ sono tutti 0 tranne per $k=n$

Vedi polinomio di Taylor

ESEMPI

• Si dimostra che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (R = +\infty)$$

- Dato che $\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$ per $x \in (-1, 1)$, allora integrando termine a termine da 0 a x si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \log(1+x) \quad \text{per } x \in (-1, 1]$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

si dimostra che
vale anche per $x=1$
 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$

- Dato che $\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2}$ per $x \in (-1, 1)$, allora integrando termine a termine da 0 a x si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg(x) \quad \text{per } x \in [-1, 1]$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

si dimostra che
vale anche per $x=1$ e $x=-1$
 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$

- Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} \stackrel{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 2e. \end{aligned}$$

- Calcolare $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

In generale, per $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kx^k &= x \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = x \sum_{k=1}^{\infty} D(x^k) \stackrel{\text{derivazione termine a termine}}{=} x D\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) \\ &= x D\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Allora

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

