Analisi Matematica 2

Foglio di esercizi n. 8

1. Calcolare $\iint_S f\,dS$ per ciascuna funzione f e superficie S.

a. $f(x,y,z)=x^2+z^2$ e S è la superficie del cubo $\{(x,y,z):x,y,z\in[0,1]\}$

b. $f(x,y,z)=x\sqrt{z^2-4x^2}$ e $S=\{(x,y,z):z=2\sqrt{x^2+y^2},(x-1)^2+y^2\le 1\}$

c. $f(x,y,z)=\dfrac{z^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ e $S=\{(r\cos(t),r\sin(t),t):r\in[0,1],t\in[0,2\pi]\}$

d. $f(x,y,z)=\sqrt{(1+x)(1+y)-1}$ e $S=\{(u^2,v^2,2(u-v)):u\in[0,1],v\in[0,1]\}$

2. Calcolare il flusso $\iint_S\langle \boldsymbol{F},d\boldsymbol{S}\rangle$ per ciascun campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ e superficie orientata S.

a. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(3e^{x+y},2y-z,xy\big)$ e S è il bordo di D orientato verso l'esterno con $D=\{(x,y,z):|x-1|+|y|\le 1,0\le z\le x+y\}$

b. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(e^{y^2},5x^2y,5y^2z)$, S è il bordo di D orientato verso l'esterno e D è generato dalla rotazione completa di $T=\{(x,0,z):0\le 2x\le z\le 1+x^2\le 2\}$ attorno all'asse z

c. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(-5x^3,2y^2+z,\sin(xy)\big)$ e S è il bordo di D orientato verso l'interno con $D=\{(x,y,z):\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{2}\le 1\}$

d. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ e S è il bordo di D orientato verso l'interno con $D=\{(x,y,z):x^2+z^2\le 4,|y|\le 2\}$

e. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(2z,3y,x^2+4z)$ e $S=\{(x,y,z):(x^2+y^2)^{3/2}=z\le 1\}$ orientata in modo che il versore normale in $(0,0,0)$ sia $(0,0,-1)$

f. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x^2-y^3,3y^2+z,xz+y)$ e $S=\{(x,y,z):0\le z=1-x^2-y^2,y\ge 0\}$ orientata in modo che il versore normale in $(0,0,1)$ sia $(0,0,1)$

g. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(10xy^2,z,\log(1+\sqrt{x^2+y^2})$ e $S=\{(x,y,z):z^2=x^2+y^2,1\le z\le 2\}$ orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{k}\rangle\ge 0$

3. Usando il teorema del rotore, calcolare $\int_\gamma\langle \boldsymbol{F},d\boldsymbol{s}\rangle$ per ciascun campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ e curva $\boldsymbol{\gamma}$ orientata in modo che la sua proiezione su $z=0$ sia percorsa in senso antiorario.

a. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(\sin(x),z(x-1),y(x+1))$ e $\gamma=\{(x,y,z):x^2+y^2=4,z=2+x^2y^2\}$

b. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(y+ye^{xy},xe^{xy},x^3\big)$ e $\gamma=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1,x+z=1\}$

c. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(z+1,xz,y^2-yz\big)$ e γ è il bordo del triangolo di vertici $(3,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,6)$

4. Usando il teorema del rotore, calcolare $\int_{\partial^+S}\langle \boldsymbol{F},d\boldsymbol{s}\rangle$ per ciascun campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ e superficie orientata S. Se l'orientazione di S non è specificata si intende quella tale che $\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{k}\rangle\ge 0$ in ogni suo punto.

a. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(e^x,xy+2x,x^2+z^2\big)$ e $S=\{(x,y,z):x^2+y^2=4-z,0\le z\le 3,y\ge 0\}$

b. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}+xy^2,z\right)$ e $S=\{(x,y,z):x^2+y^2=z^2+4,0\le z\le\sqrt{5}\}$

c. $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(z^2+x^2y,3xyz,2xz\big)$ e $S=\{(x,y,z):x^2+y^2=1,0\le z\le 3-x-y\}$ orientata in modo che il versore normale in $(1,0,0)$ sia $(-1,0,0)$