Analisi Matematica 2
Foglio di esercizi n. 7

1. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ per ciascun campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ e curva $\boldsymbol{\gamma}$.

a. $\boldsymbol{F}(x,y) = \big((x^2+y^2)e^x, ye^x\big)$ e il sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ è il bordo del quadrilatero di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$ e $(1,1)$ percorso in senso orario

b. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{x+3y}{(1+x)^2}, 3y^2\log(1+x+y+xy)\right)$ e il sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ è il bordo di $[0,2]\times[0,1]$ percorso in senso antiorario

c. $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(-7yx^2, (\sqrt{y}+x)y^2\big)$ e il sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ è il bordo di $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2y\}$ percorso in senso antiorario

d. $\boldsymbol{F}(x,y) = \big(\sin(x)+2y, (x+1)^2+\cos(y)\big)$ e il sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ è il bordo di $\{(x,y) : (y-3)^2 \leq x \leq 9-y^2\}$ percorso in senso antiorario

e. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(e^{-x^2}-y, 4x^3+\log(1+y)\right)$ e il sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ è il bordo di $\{(x,y) : 16x^2+y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$ percorso in senso antiorario

f. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{x+y^2}{1+x^2}, y^2+y\arctan(x)\right)$ e il sostegno di $\boldsymbol{\gamma}$ è l'unione dei segmenti da $(-1,0)$ a $(0,1)$ e da $(0,1)$ a $(1,0)$

g. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ e $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), 1+\sqrt{2}\sin(t))$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}]$

h. $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(3y+\dfrac{8x}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{8y}{(x^2+y^2)^2}\right)$ e $\boldsymbol{\gamma}(t) = (1+t)\cdot(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $t \in [0,1]$

2. Svolgere i seguenti integrali di superficie.

a. Calcolare $\iint_S z\, dS$ con $S = \{(x,y,z) : z = xy, x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$

b. Calcolare $\iint_S \frac{x^2}{z^2}\, dS$ con $S = \{(x,y,z) : (x^2+y^2)z^2 = 1, z \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 3\}$

c. Calcolare $\iint_S |x-y|\, dS$ con $S = \{(x,y,z) : y \geq 0, x^2+y^2+z^2 = 4\}$

d. Calcolare l'area di $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4, x^2+y^2 \leq 2y\}$

e. Calcolare l'area di $S = \{(x,y,z) : z^2 = x^2+y^2, z \geq 0, y^2+z^2 \leq 1\}$

f. Calcolare il baricentro di $S = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2, z \in [0,1]\}$

g. Calcolare $\frac{I}{M}$ del rettangolo $S = \{(x,y,0) : x \in [0,a], y \in [0,b]\}$ con $a, b > 0$ rispetto all'asse z e ad una sua diagonale

h. Calcolare $\frac{I}{M}$ di $S = \{(x,y,z) : \frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{z^2}{h^2}, z \in [0,h]\}$ con $h, R > 0$ rispetto agli assi y e z

3. Verificare le seguenti identità dove $\boldsymbol{F}, g$ hanno regolarità C^2.

a. $\operatorname{rot}(\nabla g) = \boldsymbol{0}$

b. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\boldsymbol{F})) = 0$

c. $\operatorname{div}(g\boldsymbol{F}) = g\operatorname{div}(\boldsymbol{F}) + \langle \nabla g, \boldsymbol{F}\rangle$

d. $\operatorname{rot}(g\boldsymbol{F}) = g\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}) + \nabla g \times \boldsymbol{F}$