

Analisi Matematica 2

Foglio di esercizi n. 6

1. Svolgere i seguenti esercizi sugli integrali multipli.

a. Calcolare il baricentro di $D = \{(x, y) : \frac{hx^2}{b^2} \leq y \leq h\}$ con $h, b > 0$

b. Calcolare $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ con $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2 \min(x, y)\}$

c. Calcolare $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy$ con $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$

d. Calcolare per $\alpha > 0$, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{D_R} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha} dx dy$ con $D_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

e. Calcolare $\lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{D_r} \frac{x^2 \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$ con $D_r = \{(x, y) : r^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

f. Calcolare $\lim_{r \rightarrow 0^+} \iint_{D_r} \frac{y^2}{x^2(1 - y^2)} dx dy$ con $D_r = \{(x, y) : r \leq y \leq 1 - r, y \leq x \leq 1\}$

g. Calcolare $\iiint_D \sin(\pi(x + y + z)) dx dy dz$ con D il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

h. Calcolare $\frac{I}{M}$ di $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, z \in [0, h]\}$ con $h, R > 0$, rispetto all'asse x

i. Calcolare $\frac{I}{M}$ di $D = \{(x, y, z) : \frac{x^2 + y^2}{R^2} \leq \frac{z^2}{h^2}, z \in [0, h]\}$ con $h, R > 0$, rispetto agli assi y e z

j. Calcolare il volume di $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$

2. Svolgere i seguenti esercizi sugli integrali curvilinei di prima specie.

a. Calcolare $\int_\gamma f ds$ con $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $\gamma(t) = (e^{-t} \sin(t), e^{-t} \cos(t))$ tale che $t \in [0, 2\pi]$

b. Calcolare $\int_\gamma f ds$ con $f(x, y) = xy$ e $\gamma = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

c. Calcolare la lunghezza di $\gamma = \{(x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

d. Calcolare il baricentro della curva $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ tale che $t \in [0, 2\pi]$

e. Calcolare l'area della superficie di $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}$

3. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ per ciascun campo vettoriale \mathbf{F} e curva γ .

a. $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x - y)$, $\gamma(t) = (2 \cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 3\pi/2]$

b. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{1}{x + y}, x\right)$, $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [1, 2]$

c. $\mathbf{F}(x, y) = \left(y + \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}\right)$, il sostegno di γ è il bordo di $\{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$

percorso in senso antiorario

d. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x + y + 2}, -\frac{1}{x + y + 2}\right)$, il sostegno di γ è il bordo di $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$

percorso in senso orario

e. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz + 3x^2, 2xz + e^y, 2xy + x^2z)$, $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 3\pi]$