

ANALISI MATEMATICA 2 - FOGLIO 4

1.a $2y - x^2 = 2 + \log(y)$ in $(0,1)$. T_2 di $y = \varphi(x)$ in $x=0$?

Sia $f(x,y) = 2y - x^2 - 2 - \log(y)$.

$$f_y(0,1) = \left(2 - \frac{1}{y}\right) \Big|_{(0,1)} = 1 \neq 0 \stackrel{\text{TFI}}{\Rightarrow} \exists y = \varphi(x).$$

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = -\frac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)} = -\frac{(-2x)}{1} \Big|_{(0,1)} = 0.$$

Inoltre

$$2\varphi(x) - x^2 = 2 + \log(\varphi(x)) \stackrel{D}{\Rightarrow} 2\varphi'(x) - 2x = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

$$\stackrel{D}{\Rightarrow} 2\varphi''(x) - 2 = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - (\varphi'(x))^2}{(\varphi(x))^2}$$

Per $x=0$ otteniamo

$$2\varphi''(0) - 2 = \frac{\varphi''(0) \cdot 1 - 0^2}{1^2} \Rightarrow \varphi''(0) = 2$$

Quindi

$$T_2(x) = 1 + 0 \cdot x + \frac{2}{2}x^2 = 1 + x^2.$$

1.b $\log(1+x^2-2y) = x + y^4$ in $(0,0)$. T_2 di $y = \varphi(x)$ in $x=0$?

Sia $f(x,y) = \log(1+x^2-2y) - x - y^4$.

$$f_y(0,0) = \left(\frac{-2}{1+x^2-2y} - 4y^3\right) \Big|_{(0,0)} = -2 \neq 0 \stackrel{\text{TFI}}{\Rightarrow} \exists y = \varphi(x)$$

$$\varphi(0) = 0 \text{ e } \varphi'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{\left(\frac{2x}{1+x^2-2y} - 1\right) \Big|_{(0,0)}}{(-2)} = -\frac{1}{2}.$$

Inoltre

$$\log(1+x^2-2\varphi(x)) = x + (\varphi(x))^4 \stackrel{D}{\Rightarrow} \frac{2x - 2\varphi'(x)}{1+x^2-2\varphi(x)} = 1 + 4\varphi^3(x)\varphi'(x)$$

$$\stackrel{D}{\Rightarrow} \frac{1}{(1+x^2-2\varphi(x))^2} \left[(2-2\varphi''(x))(1+x^2-2\varphi(x)) - (2x-2\varphi'(x))^2 \right] \\ = 12\varphi^2(x)(\varphi'(x))^2 + 4\varphi^3(x)\varphi''(x)$$

Per $x=0$ si ha

$$\frac{1}{1^2} \left[(2 - 2\varphi''(0)) \cdot 1 - (-2 \cdot (-\frac{1}{2}))^2 \right] = 0$$

$$2 - 2\varphi''(0) - 1 = 0 \Rightarrow \varphi''(0) = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$T_2(x) = 0 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}.$$

1.c $y(x^2+y^2) = 2x^2$ in $(1,1)$. T_2 di $y=\varphi(x)$ in $x=1$?

$$\text{Sia } f(x,y) = y(x^2+y^2) - 2x^2 = yx^2 + y^3 - 2x^2.$$

$$f_y(1,1) = (x^2 + 3y^2)|_{(1,1)} = 4 \neq 0 \stackrel{\text{TFI}}{\Rightarrow} \exists y = \varphi(x).$$

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -\frac{(2yx - 4x)|_{(1,1)}}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Inoltre } \varphi(x)(x^2 + \varphi^2(x)) = 2x^2$$

$$\begin{aligned} \stackrel{D}{\Rightarrow} \varphi'(x)(x^2 + \varphi^2(x)) + \varphi(x)(2x + 2\varphi(x)\varphi'(x)) &= 4x \\ \varphi'(x)x^2 + \varphi(x) \cdot 2x + 3\varphi^2(x)\varphi'(x) &= 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{D}{\Rightarrow} \varphi''(x)x^2 + \varphi'(x) \cdot 2x + \varphi'(x)2x + 2\varphi(x) \\ + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi^2(x)\varphi''(x) &= 4 \end{aligned}$$

Per $x=1$,

$$\varphi''(1) + \cancel{1} + \cancel{1} + \cancel{2} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 3\varphi''(1) = \cancel{4} \Rightarrow \varphi''(1) = -\frac{3}{8}.$$

Quindi

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{16}(x-1)^2.$$

1.d $x^2 - 2x + 4y^2 = 3$ in $(1,1)$. T_2 di $y=\varphi(x)$ in $x=1$?

$$\text{Sia } f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2 - 3.$$

$$f_y(1,1) = (8y)|_{(1,1)} = 8 \neq 0 \stackrel{\text{TFI}}{\Rightarrow} \exists y = \varphi(x).$$

$$\varphi(1)=1, \quad \varphi'(1)=-\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)}=-\frac{(2x-2)|_{(1,1)}}{8}=0.$$

$$\text{Inoltre } x^2-2x+4\varphi^2(x)=3$$

$$\stackrel{D}{\Rightarrow} 2x-2+8\varphi(x)\cdot\varphi'(x)=0$$

$$\stackrel{D}{\Rightarrow} 2+8(\varphi'(x))^2+8\varphi(x)\varphi''(x)=0.$$

Per $x=1$,

$$2+8\cdot 0+8\cdot 1\cdot\varphi''(1)=0 \Rightarrow \varphi''(1)=-\frac{1}{4}.$$

Quindi

$$T_2(x)=1-\frac{1}{8}(x-1)^2.$$

1.e $x^2y=e^{xy+1}$ in $(-1,1)$. T_2 di $y=\varphi(x)$ in $x=-1$?

$$\text{Sia } f(x,y)=x^2y-e^{xy+1}.$$

$$f_y(-1,1)=(x^2-e^{xy+1}\cdot x)|_{(-1,1)}=2\neq 0 \stackrel{\text{TFI}}{\Rightarrow} \exists y=\varphi(x).$$

$$\varphi(-1)=1, \quad \varphi'(-1)=-\frac{f_x(-1,1)}{f_y(-1,1)}=-\frac{(2xy-e^{xy+1})|_{(-1,1)}}{2}=\frac{3}{2}.$$

$$\text{Inoltre } x^2\varphi(x)=e^{x\varphi(x)+1}$$

$$\stackrel{D}{\Rightarrow} 2x\varphi(x)+x^2\varphi'(x)=e^{x\varphi(x)+1}(\varphi(x)+x\varphi'(x))$$

$$\begin{aligned} \stackrel{D}{\Rightarrow} & 2\varphi(x)+4x\varphi'(x)+x^2\varphi''(x) \\ & = e^{x\varphi(x)+1}[(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2+(2\varphi'(x)+x\varphi''(x))] \end{aligned}$$

Per $x=-1$,

$$2\cdot 1+4(-1)\cdot\frac{3}{2}+1\cdot\varphi''(-1)=1\left[\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2\cdot\frac{3}{2}-1\cdot\varphi''(-1)\right)\right]$$

da cui

$$\varphi''(-1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+3-2+6\right)=\frac{29}{8}.$$

Quindi

$$T_2(x)=1+\frac{3}{2}(x+1)+\frac{29}{16}(x+1)^2.$$

1.f $x^5 + 3x^2y - 2y^4 = 1$ in $(1,0)$. T_2 di $y = \varphi(x)$ in $x=1$?

Sia $f(x,y) = x^5 + 3x^2y - 2y^4 - 1$.

$$f_y(1,0) = (3x^2 - 8y^3)|_{(1,0)} = 3 \neq 0 \stackrel{\text{TFI}}{\Rightarrow} \exists y = \varphi(x).$$

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = -\frac{f_x(1,0)}{f_y(1,0)} = -\frac{(5x^4 + 6xy)|_{(1,0)}}{3} = -\frac{5}{3}.$$

Inoltre $x^5 + 3x^2\varphi(x) - 2\varphi^4(x) = 1$,

$$\stackrel{D}{\Rightarrow} 5x^4 + 6x\varphi(x) + 3x^2\varphi'(x) - 8\varphi^3(x) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\stackrel{D}{\Rightarrow} 20x^3 + 6\varphi(x) + 12x\varphi'(x) + 3x^2\varphi''(x)$$

$$\text{Per } x=1, \quad \boxed{-24\varphi^2(x) \cdot \varphi'(x) - 8\varphi^3(x)\varphi''(x) = 0}$$

$$\cancel{20} + 0 + 12\cancel{\left(-\frac{5}{3}\right)} + 3\varphi''(1) = 0 \Rightarrow \varphi''(1) = 0$$

Quindi

$$T_2(x) = -\frac{5}{3}(x-1).$$

2.a

$$\begin{cases} xyz = -2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases} \text{ in } (-1, 2, 1). \quad T_1 \text{ di } y = \varphi(x) \text{ e } z = \psi(x) \text{ in } x = -1?$$

Siamo $f(x, y, z) = xyz + 2 = 0$, $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 8 = 0$.

$$J = \begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xz & xy \\ 3y^2 & 3z^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1,2,1)} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = 21 \neq 0$$

Quindi per TFI $\exists y = \varphi(x)$ e $\exists z = \psi(x)$: $\varphi(-1) = 2$, $\psi(-1) = 1$.

Inoltre derivando

$$\begin{cases} x\varphi(x)\psi(x) = -2 \\ x^3 + (\varphi(x))^3 + (\psi(x))^3 = 8 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \varphi(x)\psi(x) + x\varphi'(x)\psi(x) + x\varphi(x)\psi'(x) = 0 \\ 3x^2 + 3(\varphi(x))^2 \cdot \varphi'(x) + 3(\psi(x))^2 \cdot \psi'(x) = 0 \end{cases}$$

Per $x = -1$ si ha

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - \varphi'(-1) \cdot 1 - 2\psi'(-1) = 0 \\ 3 + 12\varphi'(-1) + 3\psi'(-1) = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'(-1) \\ \psi'(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\varphi'(-1) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-7} \quad \text{e} \quad \psi'(-1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}.$$

REGOLA DI CRAMER

Infine

$$\varphi) \quad T_1(x) = 2 - \frac{4}{7}(x+1)$$

$$\psi) \quad T_1(x) = 1 + \frac{9}{7}(x+1).$$

2.6 $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ xy + yz = xz - 3 \end{cases}$ in $(1, -1, 1)$. T_1 di $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$ in $x=1$?

Siamo

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0, \quad g(x, y, z) = xy + yz - xz + 3 = 0$$

$$J = \begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -2z \\ x+z & y-x \end{bmatrix} \xrightarrow{(1, -1, 1)} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = 16 \neq 0$$

Quindi per TFI $\exists y = \varphi(x)$ e $\exists z = \psi(x)$: $\varphi(1) = -1$ e $\psi(1) = 1$.

Inoltre derivando

$$\begin{cases} x^2 + \varphi^2(x) - \psi^2(x) = 1 \\ x\varphi(x) + \varphi(x)\psi(x) = x\psi(x) - 3 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - 2\psi(x)\psi'(x) = 0 \\ \varphi(x) + x\varphi'(x) + \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x) = \psi(x) + x\psi'(x) \end{cases}$$

Per $x=1$ si ha

$$\begin{cases} 2 - 2\varphi'(1) - 2\psi'(1) = 0 \\ -1 + \varphi'(1) + \varphi'(1) - \psi'(1) = 1 + \psi'(1) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'(1) \\ \psi'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\varphi'(1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1 \quad \psi'(1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 0$$

In fine

$$\varphi) T_1(x) = -1 + (x-1) = x-2, \quad \psi) T_1(x) = 1 + 0 \cdot (x-1) = 1.$$

3.a $\{(x, y, z) : xyz = -8\}$ Piano tangente in $(-2, 1, 4)$?

Sia $f(x, y, z) = xyz + 8$. Allora

$$\nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

e il piano tangente in $(-2, 1, 4)$ è

$$f_x(-2, 1, 4)(x+2) + f_y(-2, 1, 4)(y-1) + f_z(-2, 1, 4)(z-4) = 0$$

$$\text{ossia } 4(x+2) - 8(y-1) - 2(z-4) = 0$$

$$2x - 4y - z + 12 = 0.$$

3.b $\{(x, y, z) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + 4(z-2)^2 = 9\}$

Piano tangente in $(3, 1, 3)$?

Sia $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 4(z-2)^2 - 9$. Allora

$$\nabla f(x, y, z) = (2(x-1), 2(y-2), 8(z-2))$$

e dunque $\nabla f(3, 1, 3) = (4, -2, 8)$.

Così il piano tangente in $(3, 1, 3)$ è

$$\overset{2}{4}(x-3) - \overset{1}{2}(y-1) + \overset{4}{8}(z-3) = 0$$

ossia

$$2x - y + 4z = 17.$$

3.c $\{(x, y, z) : (x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - 8z^2) = 0\}$

Piano tangente in $(2, 2, 1)$?

Sia $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - 8z^2)$. Allora

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)(x^2 + y^2 - 8z^2) + (x^2 + y^2 - z^2)(2x, 2y, -16z)$$

e quindi $\nabla f(2, 2, 1) = (4, 4, -2) \cdot 0 + 7 \cdot (4, 4, -16) = 28(1, 1, -4)$.

Così il piano richiesto è

$$1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-2) - 4(z-1) = 0 \Rightarrow x + y - 4z = 0.$$

4.a $f(x,y) = xy + x^2$ Punti stazionari vincolati:
in $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 + xy = 4\}$?

Sia $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$ allora

$$\nabla g(x,y) = (2x+y, 2y+x) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0) \notin \Gamma$$

Tutti i punti di Γ sono regolari.

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y+2x = \lambda(2x+y) \\ x = \lambda(2y+x) \\ x^2 + y^2 + xy = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (\lambda-1)(2x+y) = 0 \\ \lambda=1 \quad y=-2x \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 2y + x \rightarrow y = 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (2,0) \\ (-2,0) \end{matrix} \quad \lambda = 1$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = \lambda(-4x+x) \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \\ x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 4 \rightarrow 3x^2 = 4 \rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}) \\ (-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}) \end{matrix} \quad \lambda = -\frac{1}{3}$$

4.b $f(x,y) = (3x+2y)^2$ Punti stazionari vincolati:
in $\Gamma = \{(x,y) : 4x^2 + y^2 = 4\}$?

Sia $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$ allora

$$\nabla g(x,y) = (8x, 2y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0) \notin \Gamma$$

Tutti i punti di Γ sono regolari.

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(3x+2y) \cdot 3 = \lambda(8x) \\ 2(3x+2y) \cdot 2 = \lambda(2y) \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} 2 \textcircled{1} - 3 \textcircled{2} \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{cases} 8\lambda x - 3\lambda y = 0 \\ (3x + 2y) \cdot 2 = \lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \lambda(8x - 3y) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad y = \frac{8}{3}x$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ 3x + 2y = 0 \rightarrow y = -\frac{3x}{2} \rightarrow y = \mp \frac{6}{5} \\ 4x^2 + y^2 = 4 \rightarrow 4x^2 + \frac{9x^2}{4} = 4 \rightarrow x = \pm \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5}, -\frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5}, \frac{6}{5} \end{pmatrix} \quad \lambda = 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{8}{3}x \\ (3x + 2(\frac{8}{3}x)) \cdot 2 = \lambda(\frac{8}{3}x) \rightarrow \lambda = \frac{25}{4} \\ 4x^2 + \frac{64}{9}x^2 = 4 \rightarrow x = \pm \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5}, \frac{8}{5} \\ -\frac{3}{5}, -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \quad \lambda = \frac{25}{4}$$

4.c $f(x, y) = x - x^2 - y^2$

Punti stazionari vincolati:
in $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 9\}$?

Sia $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 9 = 0$ allora

$$\nabla g(x, y) = (2x, 4y) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 0) \notin \Gamma$$

Tutti i punti di Γ sono regolari.

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 - 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 4y \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases} \rightarrow y(2\lambda + 1) = 0$$

$$y = 0 \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 1 - 2x = \lambda 2x \\ x^2 = 9 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ 1 - 2x = -x \rightarrow x = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$$

$$x = 3 \quad x = -3$$

$$\lambda = -\frac{5}{6} \quad \lambda = -\frac{7}{6}$$

$$(3, 0), (-3, 0)$$

$$(1, 2), (1, -2)$$

4.d $f(x,y) = \log(xy)$ Punti stazionari vincolati
in $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 = y\}$?

$$D = \{(x,y) : xy > 0\}.$$

Sia $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - y = 0$ allora

$$\nabla g(x,y) = (2x, 4y-1) = (0,0) \iff (x,y) = (0, \frac{1}{4}) \notin \Gamma$$

Tutti i punti di Γ sono regolari.

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \\ xy > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \lambda 2x \rightarrow x^2 = \frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{y} = \lambda(4y-1) \rightarrow 4y^2 - y = 2x^2 \\ x^2 + 2y^2 = y \rightarrow 2y^2 - \frac{y}{2} + 2y^2 = y \\ 4y^2 = \frac{3}{2}y \quad y \neq 0 \\ \rightarrow y = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{8} \\ 2x^2 = 4 \cdot \frac{9}{64} - \frac{3}{8} = \frac{3}{16} \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{8} \\ \lambda = \frac{16}{3} \end{cases} \quad \boxed{\left(\frac{\sqrt{6}}{8}, \frac{3}{8}\right)}$$

4.e $f(x,y) = x^2 + (y-5)^2$ Punti stazionari vincolati
in $\Gamma = \{(x,y) : y^2 + 1 = x\}$?

Sia $g(x,y) = y^2 + 1 - x = 0$ allora

$$\nabla g(x,y) = (-1, 2y) = (0,0) \text{ impossibile}$$

Tutti i punti di Γ sono regolari.

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2(y-5) = 2\lambda y \rightarrow y-5 = -2xy \rightarrow y \neq 0 \\ y^2 + 1 = x \xrightarrow{\cdot 2y} 2y(y^2 + 1) = 2xy = -y + 5 \\ 2y^3 + 3y - 5 = 0 \\ (y-1)(2y^2 + 2y + 5) = 0 \\ \text{da cui } y = 1 \quad \Delta < 0 \\ \text{e } x = 1^2 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{(2, 1)}$$

4.8

$$f(x,y) = 2x + y$$

Punti stazionari vincolati:
in $\Gamma = \{ (x,y) : (x+1)^2 + y^2 = 5 \}$?

Sia $g(x,y) = (x+1)^2 + y^2 - 5 = 0$ allora

$$\nabla g(x,y) = (2(x+1), 2y) = (0,0) \iff (x,y) = (-1,0) \notin \Gamma$$

Tutti i punti di Γ sono regolari.

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \begin{cases} 2 = \lambda 2(x+1) \rightarrow x+1 = \frac{1}{\lambda} \\ 1 = \lambda 2y \rightarrow y = \frac{1}{2\lambda} \\ (x+1)^2 + y^2 = 5 \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 5 \end{cases}$$

$\lambda = \pm \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = -2 - 1 = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

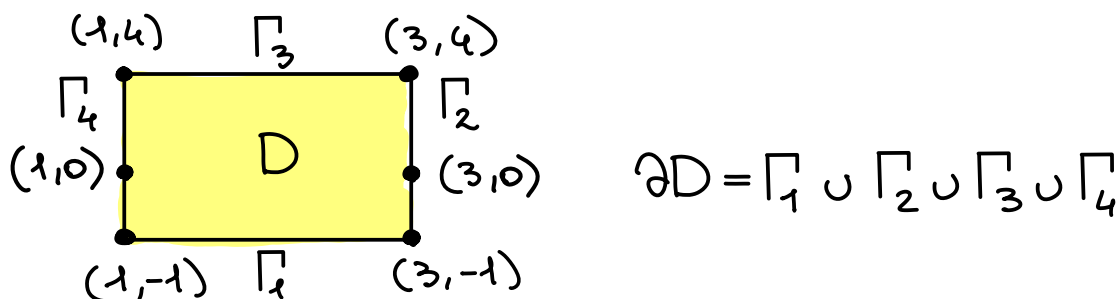
$$(1,1), (-3,-1)$$

5.a

$$f(x,y) = \log((x+1)^2 + y^2)$$

Max/min in
 $D = [1,3] \times [-1,4]$?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\})$, D è compatto e $(-1,0) \notin D$.



Punti stazionari interni a D :

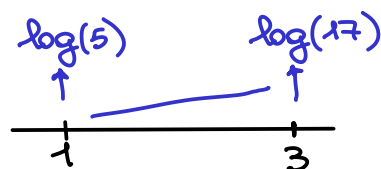
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2(x+1)}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} \right) = (0,0)$$

Senza soluzioni
in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$

Bordo di D : $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

1) $\Gamma_1 = \{(x, -1) : x \in [1, 3]\},$

$$h(x) = f(x, -1) = \log((x+1)^2 + 1)$$

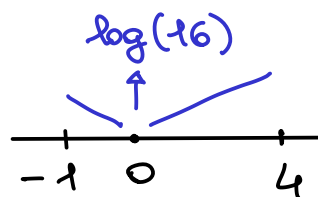


$$f(1, -1) = \log(5), \quad f(3, -1) = \log(17)$$

2) $\Gamma_2 = \{(3, y) : y \in (-1, 4)\},$

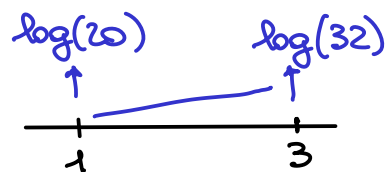
$$h(y) = f(3, y) = \log(16 + y^2)$$

$$f(3, 0) = \log(16)$$



3) $\Gamma_3 = \{(x, 4) : x \in [1, 3]\},$

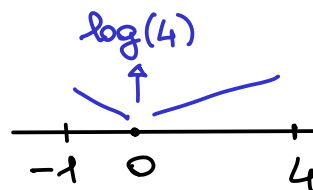
$$h(x) = f(x, 4) = \log((x+1)^2 + 16)$$



$$f(1, 4) = \log(20), \quad f(3, 4) = \log(32)$$

$$4) \Gamma_4 = \{(1, y) : y \in (-1, 4)\},$$

$$h(y) = f(1, y) = \log(4 + y^2)$$



$$f(1, 0) = \log(4)$$

Confrontando i valori trovati si ha che $(1, 0)$ è un punto di minimo assoluto con valore $\log(4)$ e $(3, 4)$ è un punto di massimo assoluto con valore $\log(32)$.

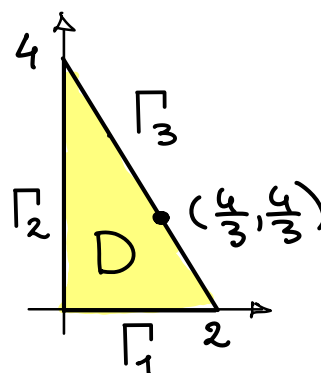
5.6 $f(x, y) = x^2 y$ Max/min in $D = \{(x, y) : 2x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, D è compatto.

Punti stazionari interni a D :

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2) = (0, 0)$$

$$x = 0 \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}.$$



Nessun punto stazionario è interno a D .

$$\text{Bordo di } D: \partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$$1) \Gamma_1 = \{(x, 0) : x \in [0, 2]\}$$

$$h(x) = f(x, 0) = 0 \text{ costante}$$

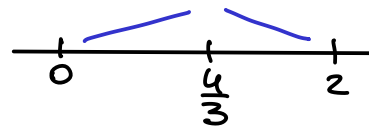
$$2) \Gamma_2 = \{(0, y) : y \in [0, 4]\}$$

$$h(y) = f(0, y) = 0 \text{ costante}$$

$$3) \Gamma_3 = \{(x, 4 - 2x) : x \in (0, 2)\}$$

$$h(x) = f(x, 4 - 2x) = x^2(4 - 2x) = 4x^2 - 2x^3$$

$$h'(x) = 8x - 6x^2 = 2x(4 - 3x)$$



$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

Confrontando i valori trovati si ha che i punti di $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sono punti di minimo assoluto con valore 0 e $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ è un punto di massimo assoluto con valore $\frac{64}{27}$.

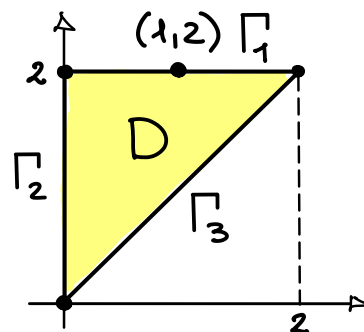
5.C $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$ Max/min in $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y \leq 2\}$?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, D è compatto.

Punti stazionari interni a D :

$$\nabla f(x,y) = (2x - y, 4y - x) = (0,0)$$

da cui si ottiene $(0,0)$ che non è interno a D .

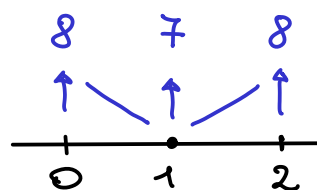


Bordo di D : $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

1) $\Gamma_1 = \{(x, 2) : x \in [0, 2]\}$

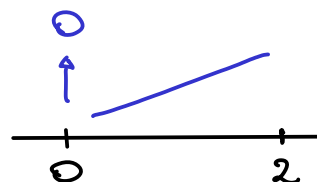
$$h(x) = f(x, 2) = x^2 + 8 - 2x$$

$$h'(x) = 2x - 2$$



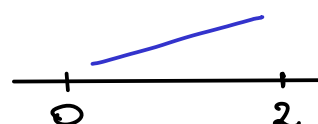
2) $\Gamma_2 = \{(0, y) : y \in [0, 2]\}$

$$h(y) = f(0, y) = 2y^2$$



3) $\Gamma_3 = \{(x, x) : x \in (0, 2)\}$

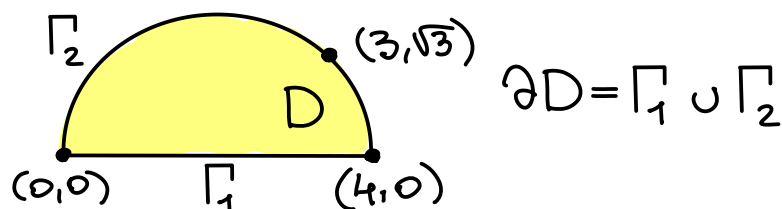
$$h(x) = f(x, x) = 2x^2$$



Confrontando i valori trovati si ha che $(2,2)$ e $(0,2)$ sono punti di massimo assoluto con valore 8 e $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto con valore 0.

5.d $f(x,y) = x + \sqrt{3}y$ Max/min in $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0\}$?
 $\hookrightarrow (x-2)^2 + y^2 \leq 4$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, D è compatto.



Non ci sono punti stazionari interni perché

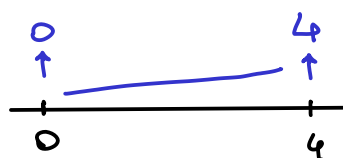
$$\nabla f(x,y) = (1, \sqrt{3}) \neq (0,0)$$

Bordo di D : $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$f(0,0) = 0, f(4,0) = 4$$

1) $\Gamma_1 = \{(x,0) : x \in [0,4]\}$

$$h(x) = f(x,0) = x$$



2) $\Gamma_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4x, y > 0\}$ $\stackrel{=}{=} g(x,y)$

$$\nabla g(x,y) = (2x-4, 2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (2,0) \notin \Gamma_2 \quad \text{tutti regolari}$$

Punti stazionari vincolati: $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 = \lambda(2x-4) \rightarrow y = \sqrt{3}(x-2) \\ \sqrt{3} = \lambda(2y) \rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \rightarrow x^2 + 3(x-2)^2 = 4x, x^2 + 3x^2 - 12x + 12 = 4x \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 2 \pm 1 = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-\sqrt{3} \\ \lambda=-\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x=3 \\ y=\sqrt{3} \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1, -\sqrt{3}) \notin \Gamma_2 \\ (3, \sqrt{3}) \in \Gamma_2 \end{matrix} \quad \boxed{f(3, \sqrt{3}) = 6}$$

Confrontando i valori trovati si ha che $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto con valore 0 e $(3, \sqrt{3})$ è un punto di massimo assoluto con valore 6.

5.e $f(x,y) = (y-x)^2$ Max/min in $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

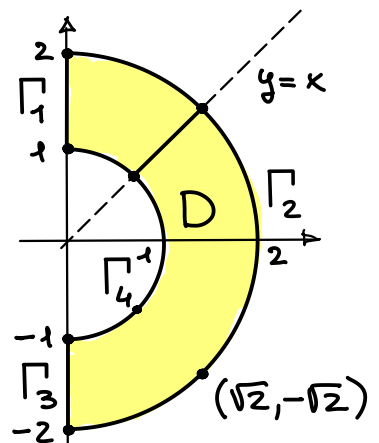
$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, D è compatto.

Punti stazionari interni a D :

$$\nabla f(x,y) = (2x-2y, 2y-2x) = (0,0)$$

da cui $y=x$. Quindi i punti stazionari interni a D sono $(x,x) : x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$

e $\boxed{f(x,x) = 0}$. Dato che $f \geq 0$ in $\mathbb{R}^2$ tali punti sono di minimo assoluto.



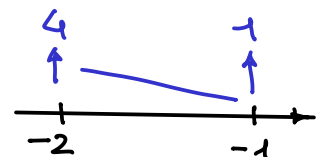
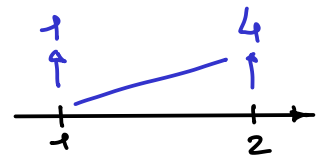
Bordo di D : $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

1) $\Gamma_1 = \{(0,y) : y \in [1,2]\}$ $f(0,y) = y^2$

con $\boxed{f(0,1) = 1}$ e $\boxed{f(0,2) = 4}$.

$\Gamma_3 = \{(0,y) : y \in [-2,-1]\}$ $f(0,y) = y^2$

con $\boxed{f(0,-2) = 4}$ e $\boxed{f(0,-1) = 1}$.



$$2) \Gamma_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4, x > 0\}, \Gamma_4 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$$

Sia $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ con $r = 1, 2$.

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ per $(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4$ tutti regolari

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases} 2x - 2y = \lambda 2x \cdot y \rightarrow xy - y^2 = \lambda xy \\ 2y - 2x = \lambda 2y \cdot x \rightarrow xy - x^2 = \lambda xy \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm y \\ 2x^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & (\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) \\ & (\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}) \end{cases}$$

$\downarrow$ sottraendo
 $x^2 = y^2$

Per $r = 1, 2$ si ha che

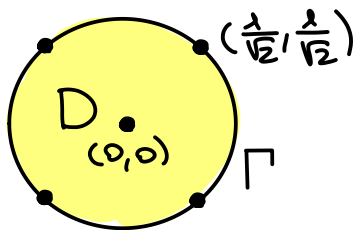
$$\begin{aligned} f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) &= f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 0 \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) &= 2, f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8 \end{aligned}$$

Confrontando i valori ottenuti si ha che:

$(x,x) : x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$ sono punti di minimo assoluto con valore 0 e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ è un punto di massimo assoluto con valore 8.

5.2 $f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ Max/min in $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, D è compatto.



$$\begin{aligned} \partial D = \Gamma &= \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \\ &= \{(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in [0, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Punti stazionari interni a D :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y(1+x^2+y^2) - 2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{x(1+x^2+y^2) - 2xy^2}{(1+x^2+y^2)^2} \right) = (0,0)$$

$$\begin{cases} y(1-x^2+y^2)=0 \rightarrow y=0, y^2=x^2-1 \\ x(1+x^2-y^2)=0 \end{cases}$$

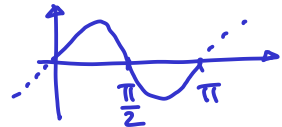
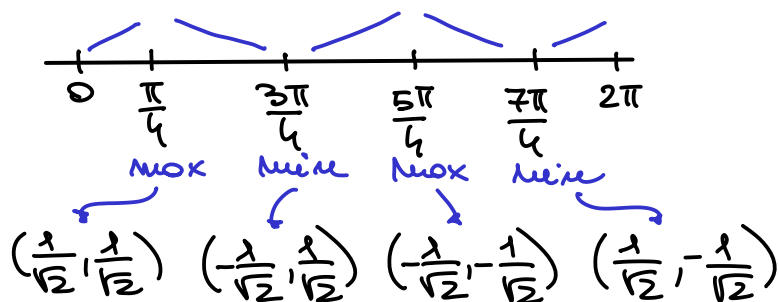
$$\begin{cases} y=0 \\ x(1+x^2)=0 \\ \downarrow x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y^2=x^2-1 \rightarrow y^2=-1 \text{ impossibile} \\ x \cdot 2=0 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

L'unico punto stazionario è $(0,0)$ ed è interno a D .

$$f(0,0)=0$$

Bordo di D : consideriamo per $\theta \in [0, 2\pi)$

$$R(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{2} \cos\theta \cdot \sin\theta = \frac{1}{4} \sin(2\theta)$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$$

Confrontando i valori ottenuti si ha che:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di massimo assoluto con valore $\frac{1}{4}$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti di minimo assoluto con valore $-\frac{1}{4}$.

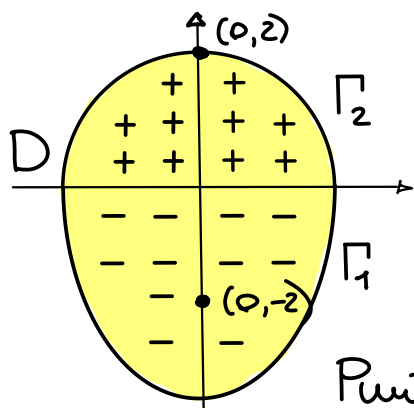
5.9

$$f(x,y) = y(y-x^2+4)$$

Max/min in

$$D = \{(x,y) : x^2-4 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, D è compatto.



Bordo di D : $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$\Gamma_1 = \{(x, x^2-4) : x \in [-2, 2]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) : x^2+y^2=4, y \in (0,2]\}$$

Punti stazionari interni a D :

$$\nabla f(x,y) = (-2xy, 2y-x^2+4) = (0,0)$$

$$\begin{cases} -2xy = 0 \\ 2y-x^2+4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow y=0 \end{matrix} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$$

(0,-2) (±2,0)

Solo (0,-2) è interno a D e $f(0,-2) = -4$

Bordo di D :

1) In Γ_1 la funzione vale $f(x, x^2-4) = 0$

2) Per Γ_2 uniamo i moltiplicatori con $g(x,y) = x^2+y^2-4 = 0$.

$$\begin{cases} -2xy = \lambda \cdot 2x \\ 2y-x^2+4 = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \rightarrow x(\lambda+y) = 0 \begin{matrix} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow \lambda=-y \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ 2y+4 = \lambda 2y \\ y^2=4 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda=-y \\ 2y-x^2+4 = -2y^2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$y = \pm 2$ $2y+y^2 = -2y^2$
 $y=0$ $y = -\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ \lambda=2 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ \lambda=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 2 \\ \lambda=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-\frac{2}{3} \\ x=\pm \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \lambda=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$(0,2) \in \Gamma_2 \quad (0,-2) \notin \Gamma_2 \quad (\pm 2,0) \notin \Gamma_2 \quad (\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2}{3}) \notin \Gamma_2$$

$(0,2)$ è l'unico punto stazionario vincolato e

$$f(0,2) = 12$$

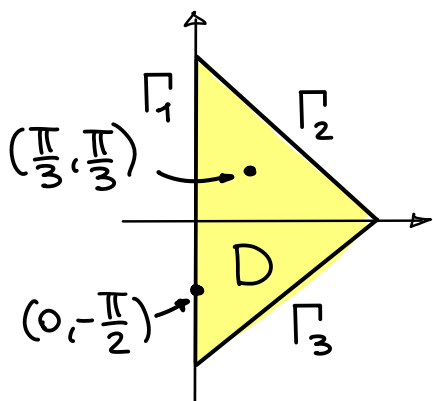
Confrontando i valori, $(0,2)$ è un punto di massimo assoluto con valore 12 e $(0,-2)$ è un punto di minimo con valore -4.

5.8

$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$$

$$\text{Max/min in } D = \{(x,y) : x + |y| \leq \pi, x \geq 0\}$$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, D è compatto.



$$\text{Bordo di } D: \partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$$\Gamma_1 = \{(0,y) : y \in [-\pi, \pi]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, \pi-x) : x \in (0, \pi]\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, x-\pi) : x \in (0, \pi)\}$$

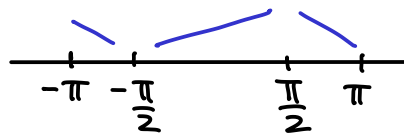
Punti stazionari: dall'esercizio 4.2 del foglio 3, l'unico punto stazionario interno a D è

$$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \text{ e } f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bordo di D :

$$1) \Gamma_1 = \{ (0, y) : y \in [-\pi, \pi] \}$$

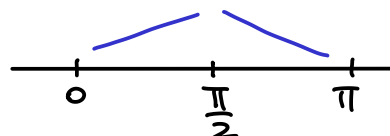
$$h(y) = f(0, y) = 2 \sin(y)$$



$$f(0, \pi) = f(0, -\pi) = 0, \quad f(0, -\frac{\pi}{2}) = -2, \quad f(0, \frac{\pi}{2}) = 2$$

$$2) \Gamma_2 = \{ (x, \pi - x) : x \in (0, \pi] \}$$

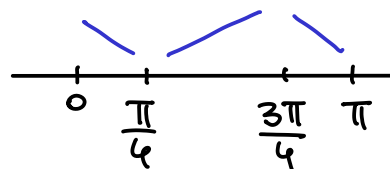
$$h(x) = f(x, \pi - x) = 2 \sin(x)$$



$$f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2, \quad f(\pi, \pi) = 0$$

$$3) \Gamma_3 = \{ (x, x - \pi) : x \in (0, \pi) \}$$

$$h(x) = f(x, x - \pi) = -\sin(2x)$$



$$f(\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}) = -1, \quad f(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) = 1$$

Confrontando i valori, $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ è un punto di massimo assoluto con valore $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $(0, -\frac{\pi}{2})$ è un punto di minimo assoluto con valore -2 .

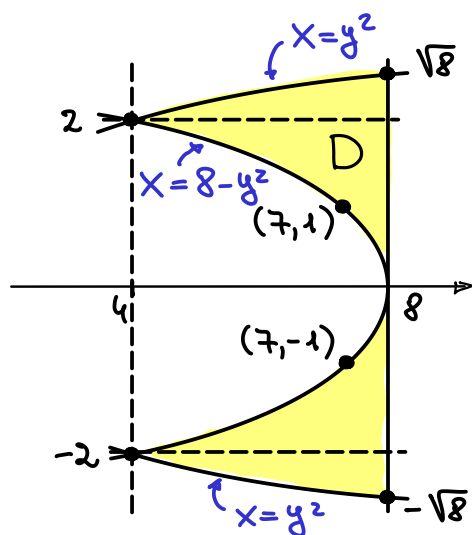
5.i

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 13x$$

$$\text{Max/min in } D = \{ (x, y) : |x-2| \geq 2 + |y^2-4|, 0 < x \leq 8 \}$$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, D è compatto. Se $0 < x \leq 8$ allora

$$|x-2| \geq 2 + |y^2-4| \begin{cases} \underbrace{x-2}_{<0} \geq \underbrace{2+|y^2-4|}_{\geq 0} & \text{se } 0 < x < 2 \\ & \text{impossibile} \\ \underbrace{x-2}_{\geq 0} \geq 2 + |y^2-4| & \text{se } 2 \leq x \leq 8 \end{cases}$$



$$x \geq 4 + |y^2 - 4| \begin{cases} x \geq 4 + y^2 - 4 & \text{se } |y| \geq 2 \\ x \geq 4 + 4 - y^2 & \text{se } |y| \leq 2 \end{cases}$$

Bordo di D : $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : g_1(x, y) = x + y^2 - 8 = 0, x \in [4, 8]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : g_2(x, y) = y^2 - x = 0, x \in [4, 8]\}$$

$$\Gamma_3 = \{(8, y) : y \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]\}$$

∂D è regolare a tratti.

$\nabla f(x, y) = (2x - 13, 2y)$ e l'unico punto stazionario $(\frac{13}{2}, 0) \notin D$. Dato che D è compatto e f è continua i punti di max/min assoluto stanno in ∂D .

Γ_1) Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 2x - 13 = \lambda \cdot 1 \\ 2y = \lambda 2y \\ x + y^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \lambda = 1 \vee y = 0$$

$4 \leq x \leq 8$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 7 \\ y = \pm 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

$$f(7, \pm 1) = -41$$

$$f(8, 0) = -40$$

Inoltre agli estremi $f(4, \pm 2) = -32$

Γ_2) Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 2x - 13 = -\lambda \cdot 1 \\ 2y = \lambda 2y \\ y^2 = x \end{cases} \rightarrow \lambda = 1 \vee y = 0$$

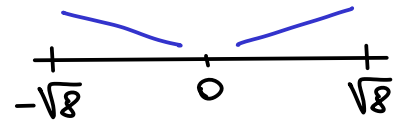
$4 \leq x \leq 8$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 6 \\ y = \pm \sqrt{6} \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \notin \Gamma_2$$

$$f(6, \pm \sqrt{6}) = -36$$

Inoltre agli estremi $f(4, \pm 2) = -32, f(8, \pm \sqrt{8}) = -32$

□₃) Restrizione $f(8,y) = -40 + y^2$



I punti $(8, \pm\sqrt{8})$ e $(8, 0)$ sono già stati considerati.

Confrontando i valori ottenuti, $(4, \pm 2)$ e $(8, \pm\sqrt{8})$ sono punti di massimo assoluto con valore -32 e $(7, \pm 1)$ sono punti di minimo assoluto con valore -41 .