

ANALISI MATEMATICA 2 - FOGLIO 1

1.a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ DIVERGE A $+\infty$

$$\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k \sqrt[k]{k}} \sim \frac{1}{k}$$

Per il confronto asintotico dato che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ anche la serie data diverge.

1.b $\sum_{k=0}^{\infty} (\sin(\cos(k)))^k$ CONVERGE

Dato che $|\sin(\cos(k))| \leq \sin(1) < 1$, per confronto con la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} (\sin(1))^k$ che è convergente, la serie data è assolutamente convergente e quindi anche convergente.

1.c $\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{arctg}(e^{-k})$ CONVERGE

Abbiamo che $\cos(\pi k) = (-1)^k$ e $\operatorname{arctg}(e^{-k})$ decresce a 0 (si noti che $\operatorname{arctg}(x)$ è crescente e e^{-k} è decrescente) e dunque la serie converge per Leibniz.

1.d $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(k^2+1)}$ DIVERGE A $+\infty$

$$\frac{1}{k \log(k^2+1)} \sim \frac{1}{k \log(k^2)} = \frac{1}{2k \log(k)}$$

Dato che $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log(k)} = +\infty$ ($\alpha=1$ e $\beta=1$) per confronto asintotico anche la serie data diverge a $+\infty$.

1.e $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(k))^{\log(k)}} \quad \text{CONVERGE}$

Notiamo che

$$(\log(k))^{\log(k)} \stackrel{a^b = \exp(b \log(a))}{=} \exp(\log(k) \cdot \log(\log(k))) \rightarrow +\infty$$

mentre $k^\alpha = \exp(\alpha \log(k))$. Quindi α numero fisso

$$\frac{a_k}{1/k^2} = \frac{k^2}{(\log(k))^{\log(k)}} = \exp(2\log(k) - \log(k)\log(\log(k))) \rightarrow 0.$$

$$= \log(k)(2 - \log(\log(k))) \rightarrow -\infty$$

Così per il confronto asintotico, dato che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, anche la serie data converge.

1.f $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1} - k}{e^{-k} + \log^2(k)} \quad \text{CONVERGE}$

Abbiamo che

$$\frac{\sqrt{k^2+1} - k}{e^{-k} + \log^2(k)} \stackrel{\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)}{=} \frac{k(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} - 1)}{\log^2(k)(1 + \frac{e^{-k}}{\log^2(k)})} \sim \frac{k \cdot \frac{1}{2k^2}}{\log^2(k)} = \frac{1/2}{k \log^2(k)}$$

Dato che la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^2(k)}$ converge, per confronto asintotico converge anche la serie data.

1.g $\sum_{k=1}^{\infty} k^k e^{-k^2} \quad \text{CONVERGE}$

Si ha che $\sqrt[k]{a_k} = k \cdot e^{-k/k} = \frac{k}{e} \rightarrow 0 < 1$ e quindi la serie converge per il criterio della radice.

1.p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k + \sin(k)}{k^2+1}$ CONVERGE

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k}{k^2+1}$ converge per Leibniz perché

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k^2+1} = 0$ e la funzione $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ è decrescente

per $t > 1$: $f'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} < 0$.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^2+1}$ converge assolutamente perché

$$\frac{\sin(k)}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge.}$$

Infine la somma di due serie convergenti è convergente.

1.i $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1})$ CONVERGE

$$a_k = (\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1}) \cdot \frac{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}}{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}}$$

$$= \frac{k^3+1 - k^3+1}{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}} \sim \frac{2}{2k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}} \quad \begin{array}{l} \text{Dato che } 3/2 > 1 \\ \text{converge per} \\ \text{comparato asintotico} \end{array}$$

In alternativa

$$a_k = k^{3/2} \left(\left(1 + \frac{1}{k^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{1}{k^3}\right)^{1/2} \right) \sim k^{3/2} \left(1 + \frac{1/2}{k^3} - \left(1 - \frac{1/2}{k^3}\right) \right)$$

$(1+x)^{1/2} \sim 1 + \frac{x}{2}$ per $x \rightarrow 0$

$$\sim k^{3/2} \cdot \frac{1}{k^3} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

1.j $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}}}{k!}$ CONVERGE

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{\sqrt{k+1}}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^{\sqrt{k}}} = \frac{1}{k+1} \exp(\sqrt{k+1} \log(k+1) - \sqrt{k} \log(k))$$

$$= \frac{1}{k+1} \exp(o(1)) \rightarrow 0 < 1$$

$\sqrt{k} \sqrt{1+\frac{1}{k}} (\log(k) + \log(1+\frac{1}{k}))$
 $= \sqrt{k} \log(k) + \frac{\log(k)}{2\sqrt{k}} (1+o(1)) \rightarrow 0$

Converge per il criterio del rapporto.

1.k $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k!)}{k^3}$ CONVERGE

Notiamo che $\log(k!) = \log(1) + \log(2) + \dots + \log(k) \leq k \log(k)$.

Quindi:

$$\frac{\log(k!)}{k^3} \leq \frac{k \log(k)}{k^3} = \frac{1}{k^2 \log^{-1}(k)} \quad \alpha=2, \beta=-1 \text{ converge!}$$

Per confronto la serie data è convergente.

1.l $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(k)}}$ DIVERGE A $+\infty$

Si ha che $2^{\log(k)} = \exp(\log(k) \cdot \log(2)) = k^{\log(2)}$

Dato che $\log(2) < 1$ allora la serie diverge.

1.m $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ CONVERGE

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \rightarrow \frac{1}{4} < 1.$$

La serie data converge per il criterio del rapporto.

1.n $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+1}{4k+3} \right)^k$ DIVERGE A $+\infty$

$$a_k = \left(\frac{4k+1}{4k+3} \right)^k = \frac{\left(1 + \frac{1/4}{k} \right)^k}{\left(1 + \frac{3/4}{k} \right)^k} \rightarrow e^{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$$

Non vale la condizione necessaria di convergenza in quanto a_k non tende a 0.

1.0 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos^2(\frac{1}{k}) - \sin^2(\frac{2}{k})}{\cos(\frac{3}{k})} \right)^{k^3} \text{ CONVERGE}$

Per $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2(\frac{1}{k}) - \sin^2(\frac{2}{k})}{\cos(\frac{3}{k})} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^2 - \left(\frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^2}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)} \\ &= \left(1 - \frac{2}{2k^2} - \frac{4}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{9}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= 1 + \left(-5 + \frac{9}{2}\right) \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Così applicando il criterio della radice

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(1 - \frac{1}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^{\frac{k^3}{k}} \rightarrow e^{-1/2} < 1$$

quindi la serie è convergente.

2.a $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2}{k^5+3}}_{a_k} \underbrace{(2x-1)^k}_z$ CONVERGE PER $x \in [0,1]$.

Studiamo la serie di potenze $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$.

Centro 0. Raggio di convergenza:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^5+3} \cdot \frac{k^5+3}{k^2} \sim \frac{k^7}{k^7} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

Estremi: per $z = \pm 1$

$$\left| \frac{k^2}{k^5+3} (\pm 1)^k \right| = \frac{k^2}{k^5+3} \sim \frac{1}{k^3} \quad \text{la serie converge.}$$

Quindi la serie converge per $z \in [-1,1]$ ossia per $-1 \leq 2x-1 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0,1]$.

2.b $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k^{3x}+k}$ CONVERGE PER $x \in \mathbb{R}$.

Proviamo ad applicare Leibniz. $a_k \rightarrow 0$?

$$a_k = \frac{\sqrt{k}}{k^{3x}+k} = \frac{1}{k^{3x-\frac{1}{2}}+\sqrt{k}} \sim \begin{cases} \frac{1}{k^{3x-\frac{1}{2}}} & \text{se } 3x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{k}} & \text{se } 3x = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{se } 3x < 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in ogni caso} \\ a_k \rightarrow 0 \end{array}$$

a_k è definitivamente decrescente?

Basta verificare che $f(k) = k^t + \sqrt{k}$ con $t = 3x - \frac{1}{2}$ è definitivamente crescente

$$f'(k) = t k^{t-1} + \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{(2t k^{t-\frac{1}{2}} + 1)}{2\sqrt{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } t > \frac{1}{2} \\ 2 & \text{se } t = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

in ogni caso > 0

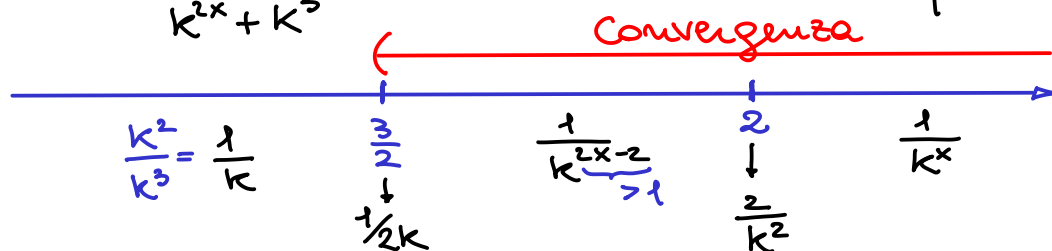
Quindi la serie converge $\forall t \in \mathbb{R}$ ossia $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.c $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^x + k^2}{k^{2x} + k^3}$ CONVERGE PER $x > \frac{3}{2}$

Abbiamo che per $k \rightarrow \infty$

$$k^x + k^2 \sim \begin{cases} k^x & \text{se } x > 2 \\ 2k^2 & \text{se } x = 2 \\ k^2 & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad k^{2x} + k^3 \sim \begin{cases} k^{2x} & \text{se } x > \frac{3}{2} \\ 2k^3 & \text{se } x = \frac{3}{2} \\ k^3 & \text{se } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Quindi $\frac{k^x + k^2}{k^{2x} + k^3}$ è asintoticamente equivalente a



2.d $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k!}$ CONVERGE PER $x \in (-1, 1)$

Per $k \rightarrow \infty$,

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|x|^{(k+1)!}}{|x|^{k!}} = |x|^{(k+1)! - k!} = |x|^{(k+1) \cdot k! - k!} = |x|^{k \cdot k!} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Quindi per il criterio del rapporto la serie converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Per $x = \pm 1$ notiamo che $|x|^{k!} = 1 \not\rightarrow 0$ e non vale la condizione necessaria di convergenza.

2.e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k + 1}{3^k + 2} \left(\frac{x-3}{2} \right)^{2k}$ CONVERGE PER $x \in (3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

Consideriamo prima la serie di potenze in $z = \left(\frac{x-3}{2} \right)^2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k + 1}{3^k + 2} z^k.$$

Raggio di convergenza:

$$|a_k|^{1/k} = \left(\frac{4^k + 1}{3^k + 2} \right)^{1/k} \rightarrow \frac{4}{3} \Rightarrow R = \frac{3}{4}.$$

Dato che $\left| \frac{4^{k+1}}{3^{k+2}} \cdot \left(\pm \frac{3}{4}\right)^k \right| \rightarrow 1 \neq 0$ la serie di potenze converge per $z \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Quindi la serie data converge se e solo se

$$-\frac{3}{4} < \overset{\text{ovvio}}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2} < \frac{3}{4} \iff (x-3)^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < x-3 < \sqrt{3}$$

ovvio $x \in (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$.

2.F $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(3x)^k}$ CONVERGE PER $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

Intanto osserviamo che per $x \neq -\frac{1}{3}$ (per $x = -\frac{1}{3}$ il denominatore è 0 per k dispari) si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(3x)^k} = \begin{cases} 1 & \text{se } |3x| < 1 \\ 1/2 & \text{se } 3x = 1 \\ 0 & \text{se } |3x| > 1 \end{cases}$$

Quindi per la convergenza è necessario che $|3x| > 1$.

In tal caso

$$\left| \frac{1}{1+(3x)^k} \right| = \left| \frac{1}{3x} \right|^k \cdot \frac{1}{\underbrace{\left| \left(\frac{1}{3x}\right)^k + 1 \right|}_{\rightarrow 1}} \sim \left| \frac{1}{3x} \right|^k$$

e dunque la serie è assolutamente convergente perché asintoticamente equivalente ad una serie geometrica di ragione $\left| \frac{1}{3x} \right| < 1$.

3.a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k - 2 \cdot 5^k}{20^{k-1}} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k - 2 \cdot 5^k}{20^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{4}{20}\right)^{k-1} - 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{5}{20}\right)^{k-1} \right) \\ &= 12 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} - 10 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{12}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{10}{1 - \frac{1}{4}} = 15 - \frac{40}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } |x| < 1$$

3.b

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 + 8k + 3} = \frac{1}{6}$$

Abbiamo che $\frac{1}{4k^2 + 8k + 3} = \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1/2}{2k+1} - \frac{1/2}{2k+3}$.

Con la somma parziale è uguale a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3.c

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\log(2)$$

Abbiamo che $\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \log\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \log\left(\frac{k-1}{k}\right) - \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$

Con la somma parziale è uguale a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \left(\log\left(\frac{k-1}{k}\right) - \log\left(\frac{k}{k+1}\right) \right) \\ &= \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) - \log\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \log\left(\frac{n-1}{n}\right) - \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2). \end{aligned}$$

$$\boxed{3.d} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + k}{(k+1)!} = \frac{e^3 - 1}{3}$$

Ricordando che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + k}{(k+1)!} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{3^j}{j!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+1)!} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \\ &= \frac{1}{3} (e^3 - 1 - 3) + (\cancel{e} - \cancel{1}) - (\cancel{e} - \cancel{1} - 1) \\ &= \frac{1}{3} (e^3 - 4) + 1 = \frac{e^3 - 1}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{3.e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!} = 5e$$

Ricordando che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ derivando termine a termine si ha che

$$xe^x = x D(e^x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x^k}{k!} \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = e.$$

Analogamente

$$x^2 e^x = x^2 D^2(e^x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x^k}{k!}$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{k!} = x^2 e^x + x e^x = (x^2 + x) e^x \stackrel{x=1}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = 2e.$$

Così

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)^2}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{j!} + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \\ &= 2e + 2e + e = 5e. \end{aligned}$$

$$\boxed{3.8} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{3}{2}$$

Ricordando che per $|x| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ derivando termine a termine si ha che

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = D\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

e

$$D\left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = D\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} (k(k-1) + k) x^k \\ &= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \\ &= x^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x - x^2}{(1-x)^3} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Infine ponendo $x = \frac{1}{3}$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} = \frac{3+9}{8} = \frac{3}{2}.$$