Analisi Matematica 2
Esercizi di riepilogo

1. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{kx}}{2^k k(k-1)(e^x-2)^k}$$
è convergente e calcolarne la somma per $x = 0$.

2. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2-1)e^{kx} + \sin(\pi x)k^{-x}}{k+1}$$
è convergente e calcolarne la somma per $x = -1$.

3. Disegnare il dominio D della funzione
$$f(x,y) = \frac{\log(3-\sqrt{x^2+y^2-1})}{|x^2-4| + (x+y)^4}$$
e la curva di livello $\{(x,y) : f(x,y) = 0\}$. f ammette un punto di minimo assoluto in D? f ammette un punto di massimo assoluto in D?

4. Calcolare i seguenti limiti:
$$1) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\sqrt{y} + y^3\sqrt{x}}{x^4 + |y|^3}, \quad 2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(\cos(xy))}{x^4+|y|^3}, \quad 3) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^3}.$$

5. Verificare che la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 3y^5}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
è continua in $(0,0)$. Calcolare le derivate parziali f_x e f_y in $(0,0)$. f è differenziabile in $(0,0)$?

6. Sia $f(x,y) = (x-3)ye^{y-x}$. Determinare tutti i punti stazionari di f e la loro natura. f è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$? f è inferiormente limitata in $\mathbb{R}^2$?

7. Sia $f(x,y) = 3xy^2 - x^3$. Determinare
1) i punti stazionari di f e la loro natura,
2) i punti stazionari vincolati di f in $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$,
3) il valore massimo e il valore minimo di f in $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

8. Sia $f(x,y) = e^{xy}$. Determinare
1) i punti stazionari di f e la loro natura,
2) il valore massimo e il valore minimo di f in $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x+\sqrt{2}, x^2+4y^2 \leq 8\}$.

9. Verificare che l'equazione $e^y = 2x + (1+xy)e^x$ definisce implicitamente due funzioni $y = \varphi(x)$ e $x = \psi(y)$ in un intorno di $(0,0)$ e determinare il polinomio di Taylor di φ in $x_0 = 0$ di ordine 2. Quanto vale il limite $\lim_{t\to0} (1+\varphi(t))^{\frac{1}{\psi(t)}}$?

10. Verificare che il sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + (z-2)^2 = 1 \end{cases}$$
definisce implicitamente due funzioni $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$ in un intorno di $(0,3,3)$ e determinare il polinomio di Taylor di φ e quello di ψ in $x_0 = 0$ di ordine 2.

11. Calcolare
$$\lim_{r\to 0^+} \iiint_{D_r} \frac{xy\log(z)}{z^2}\,dxdydz$$
con $D_r = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, r \leq z \leq 2, x^2+4y^2 \leq 4z\}$.

12. Calcolare
$$\iiint_D |x-1|\,dxdydz$$
con $D = \{(x,y,z) : x+y+2z \geq 2, 2x+y+z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

13. Calcolare
$$\iiint_D z\,dxdydz$$
con $D = \{(x,y,z) : x \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 2, z \geq \sqrt{x^2+(y-1)^2}\}$.

14. Calcolare la coordinata z del baricentro della curva
$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{t}, \sqrt{3}t, t\right) \text{ con } t \in [1,2].$$

15. Calcolare $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i}\langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ dove
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(-y\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right), x\left(x+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)$$
e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sono le circonferenze di centro $(1/2, 0)$ e raggi rispettivamente $1, 2, 3, 4$. γ_1 e γ_3 sono percorse in senso orario, mentre γ_2 e γ_4 sono percorse in senso antiorario.

16. Siano $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{2x-y(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{2y+x(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ e
$$D = \{(x,y) : x \leq 2y \leq 4x,\ 1 \leq 2xy \leq 4,\ x > 0\}.$$
Disegnare l'insieme D e poi calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$ dove γ è la curva data dal bordo di D percorsa in senso antiorario.

17. Verificare che il campo vettoriale
$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\log(y)+\sqrt{\frac{y}{x}}+2x, \frac{x}{y}+\sqrt{\frac{x}{y}}+3y^2, \log(z)\right)$$
è irrotazionale in $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. $\boldsymbol{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$? Nel caso determinare una funzione potenziale.

18. Calcolare l'area della superficie $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 = 2y\}$.

19. Calcolare
$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}\,dS$$
con $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$, dove $R > 0$, $d \geq 0$ e $d \neq R$.

20. Calcolare il rapporto $\frac{I}{M}$ della superficie toroidale
$$S = \{((d+R\cos(\varphi))\cos(\theta), (d+R\cos(\varphi))\sin(\theta), R\sin(\varphi)) : (\theta,\varphi) \in [0,2\pi]^2\}$$
con $d > R > 0$ rispetto all'asse z.

21. Calcolare il flusso $\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S} \rangle$ dove

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(2xy, -2y^2, 5y + 2yz\big)$$

e S è la superficie

$$S = \big\{(x,y,z) : x^2 + (2-y)z^2 = 1, 0 \le y \le 1, z \ge 0\big\}\,.$$

La superficie S è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \rangle \ge 0$ in ogni suo punto.

22. Calcolare il flusso $\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S} \rangle$ dove

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(x, y, z + x^2 + y^2\big)$$

e S è la superficie generata dalla rotazione completa di $C = \{(x, 0, xe^{-x}) : x \in [0,2]\}$ attorno all'asse z. S è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} \rangle \ge 0$ in ogni suo punto.

23. Calcolare il flusso $\iint_S \langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S} \rangle$ sia direttamente che usando il teorema del rotore, dove

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(4y + xz, e^y, xy + z^2\big)$$

e S è la superficie

$$S = \big\{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 + 2z = 4, z \ge 1\big\}\,.$$

S è orientata in modo che il versore normale in $(0,0,2)$ sia $\boldsymbol{n} = (0,0,-1)$.

24. Usando il teorema del rotore, calcolare $\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \rangle$ con

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(e^x + y, x^2 z + y^2, z^3 - x^2\big)$$

e $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 5 + 4\sin(t)\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

25. Sia il campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{1+x^2+y^2}, x^3 + z, 2\right)$ e sia il solido

$$D = \big\{(x,y,z) \,:\, 0 \le z \le x^2 + y^2 \le 2\big\}$$

con il bordo ∂D orientato verso l'esterno. Inoltre siano le superfici:

$$S_1 = \big\{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 = 2\big\} \cap \partial D \quad \text{e} \quad S_2 = \big\{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 = z\big\} \cap \partial D.$$

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S} \rangle$.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S} \rangle$.