Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 11-7-2025

Esercizio 1. Sia $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k + 4^k(k-1)!}{(k+2)! + 8^k k!} \cdot \frac{x^k}{\sqrt{k}}$.

(a) Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze data.

(b) Se si pone $x = |t^2 - 3|$ per quali $t \in \mathbb{R}$ converge la serie?

(a) Si ha che

$$a_k = \frac{6^k + 4^k(k-1)!}{(k+2)! + 8^k k!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \sim \frac{4^k(k-1)!}{8^k k!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2^k k^{3/2}}$$

e quindi il raggio di convergente vale

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2^k k^{3/2}}\right)^{1/k} = \frac{1}{2} \Rightarrow R=2.$$

(b) Per (a) la serie converge per $x \in (-2,2)$ e per $x = \pm 2$

$$|a_k x^k| \sim \frac{\cancel{2^k}}{\cancel{2^k} k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

e quindi la serie è assolutamente convergente.

Così l'insieme di convergenza rispetto a x è $[-2,2]$ mentre rispetto a t è

$$-2 \leq |t^2-3| \leq 2 \iff |t^2-3| \leq 2 \iff -2 \leq t^2-3 \leq 2$$

$$\iff 1 \leq t^2 \leq 5 \iff t \in [-\sqrt{5},-1] \cup [1,\sqrt{5}].$$

Esercizio 2. Sia $D = \{(x, y) : 3(x^2 - 2x)(x^2 + 2) \le y(x^2 + 2) \le 4,\ x \in [0, 2]\}$.

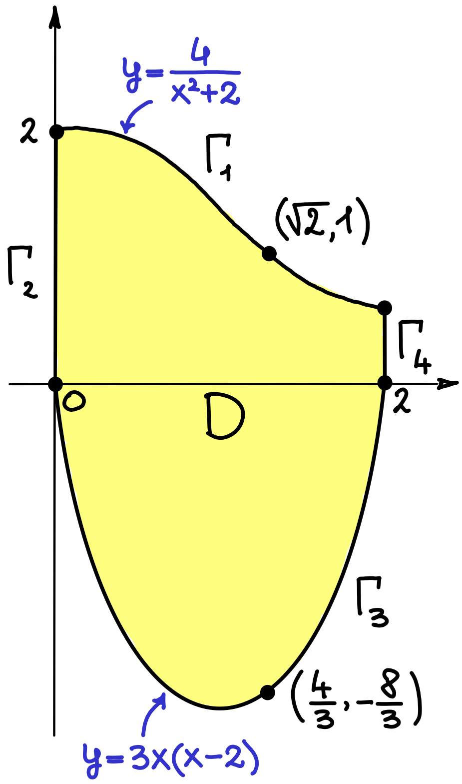
(a) Determinare il valore il massimo e il valore minimo di $f(x, y) = xy$ in D.

(b) Fare un esempio di funzione $g(x, y)$ che sia definita in D e tale che

$$\sup\{g(x, y)\ :\ (x, y) \in D\} = +\infty \quad \text{e} \quad \inf\{g(x, y)\ :\ (x, y) \in D\} = -\infty.$$

(a) Punti critici:

$$\nabla f(x,y) = (y,x) = (0,0) \Rightarrow (0,0) \in \partial D$$

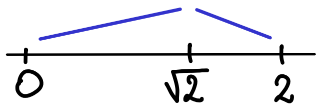


Bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$:

1) $\Gamma_1 = \left\{\left(x, \frac{4}{x^2+2}\right) : x \in (0,2)\right\}$

$$h(x) = f\left(x, \frac{4}{x^2+2}\right) = \frac{4x}{x^2+2}$$

$$h'(x) = \frac{4}{(x^2+2)^2} \cdot \underbrace{(x^2+2-x\cdot 2x)}_{2-x^2}$$

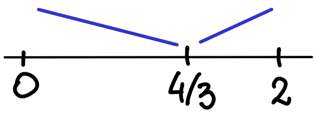


$$\boxed{f(\sqrt{2},1) = \sqrt{2}}$$

2) $\Gamma_2 = \{(0,y) : y \in [0,2]\}$ $\quad \boxed{f(0,y) = 0}$

3) $\Gamma_3 = \{(x, 3x(x-2)) : x \in (0,2)\}$ $\quad h(x) = f(x, 3x(x-2)) = 3(x^3 - 2x^2)$

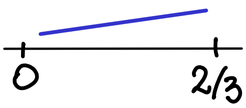
$$h'(x) = 3\cdot(3x^2 - 4x)$$



$$\boxed{f\left(\tfrac{4}{3}, -\tfrac{8}{3}\right) = -\frac{32}{3}}$$

4) $\Gamma_4 = \left\{(2,y) : y \in \left[0, \frac{2}{3}\right]\right\}$ $\quad h(y) = f(2,y)) = 2y$

$$h'(y) = 2$$



$$\boxed{f(2,0) = 0,\ f\left(2, \tfrac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}}$$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in D è $\sqrt{2}$ e quello minimo è $-\frac{32}{3}$.

(b) D è compatto e quindi la funzione g deve essere discontinua in D. Ad esempio

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

Allora

$$\lim_{(x,y)\to(1^+,0)} g(x,y) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(1^-,0)} g(x,y) = -\infty$$

Dato che $(1,0)$ è un punto interno a D si ha che

$\sup\{g(x,y) : (x,y) \in D\} = +\infty$ e $\inf\{g(x,y) : (x,y)\in D\} = -\infty$.

Esercizio 3. Sia $D = \{(x,y,z) : 2\sqrt{x^2+y^2} \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$.

(a) Disegnare la sezione piana data dall'intersezione di D con il piano $y = 0$.

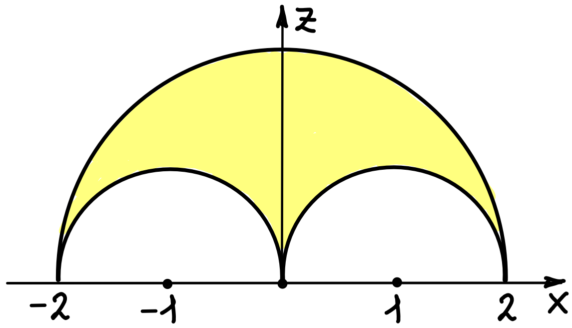
(b) Calcolare le coordinate del baricentro di D.

(a)

$$D \cap \{y=0\} = \{(x,0,z) : 2\underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|} \le x^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$$

Così

$$\begin{cases} x \ge 0,\ z \ge 0 \\ x^2+z^2 \le 4 \\ (x-1)^2+z^2 \le 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \le 0,\ z \ge 0 \\ x^2+z^2 \le 4 \\ (x+1)^2+z^2 \le 1 \end{cases}$$



(b) Dato che D è invariante per rotazione intorno all'asse z, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. D è mezza sfera di raggio 2 meno mezzo toro di raggio 1 e con sezione un cerchio di raggio 1 e dunque:

$$|D| = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 - 2\pi \cdot 1 \cdot \pi \cdot 1^2\right) = \frac{\pi}{3}(16 - 3\pi).$$

Inoltre, in coordinate sferiche, D è definito da

$$\begin{cases} 2\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \le \rho^2 \le 4 \\ \rho\cos\varphi \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\operatorname{sen}\varphi \le \rho \le 2 \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

e così

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_{2\operatorname{sen}\varphi}^{2} \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\rho^4\right]_{2\operatorname{sen}\varphi}^{2} \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^5\varphi) \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= 8\pi \left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen}^6\varphi}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi}{3}.$$

Infine $$\bar{z} = \frac{1}{|D|} \iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \frac{8}{16 - 3\pi}.$$

Esercizio 4. Sia il campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (2x^2y, -2xy^2, \log(x^2+y^2+z^2))$ e sia il solido $D = \{(x,y,z) : 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \le 0\}$ con il bordo ∂D orientato verso l'esterno.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_{\partial D} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_{S} \langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S}\rangle$ dove S è la parte di ∂D che non interseca il piano $z=0$.

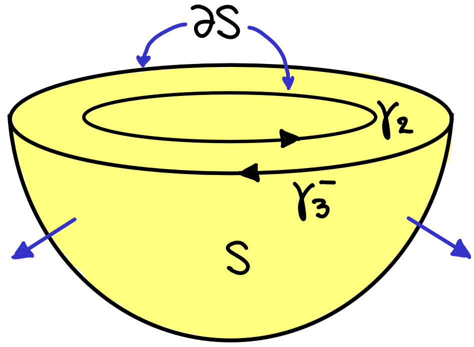
(a) Per il teorema della divergenza

$$\iint_{\overset{+}{\partial D}} \langle \vec F, d\vec S\rangle = \iiint_D \underbrace{\mathrm{div}(\vec F)}_{\cancel{4xy}-\cancel{4xy}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}}\, dx\,dy\,dz$$

$$\overset{CS}{=} \int_{\rho=2}^{3}\int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{2\rho\cos\varphi}{\cancel{\rho^2}}\, \cancel{\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \cancel{2}\pi\,\left[\rho^2\right]_2^3 \left[\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\cancel{2}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -5\pi$$

(b) Per il teorema del rotore



$$\iint_S \langle \mathrm{rot}(\vec F), d\vec S\rangle = \int_{\gamma_2 \cup \gamma_3^-} \langle \vec F, d\vec s\rangle$$

$$= -\pi(2)^4 - \left(-\pi(3)^4\right) = 65\pi$$

dove $\vec{\gamma}_r(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\,t, 0)$ per $t \in [0, 2\pi]$ e

$$\int_{\gamma_r} \langle \vec F, d\vec s\rangle = \int_0^{2\pi} \langle (2x^2y, -2xy^2, *), (-r\,\mathrm{sen}\,t, r\cos t, 0)\rangle\, dt$$

$$= -r^4 \int_0^{2\pi} \underbrace{4\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2 t}_{\mathrm{sen}^2 2t}\, dt = -\pi r^4.$$