

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = y^2 e^x$.

(a) Determinare il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x, y) : 9x^2 + 4y^2 \leq 72, |y - 2\sqrt{2}| \leq \sqrt{2}\}.$$

(b) Trovare dei valori reali per x_0, y_0 e R in modo che in

$$C = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$$

il valore massimo di f sia e^2 e il valore minimo di f sia 0.

(a) $\nabla f(x, y) = (y^2 e^x, 2ye^x)$

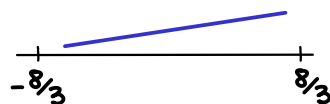
$$\begin{cases} y^2 e^x = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases} \iff y = 0$$

e quindi in D non ci sono punti stazionari.

Inoltre $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dove

1) $\Gamma_1 = \{(x, \sqrt{2}) : x \in [-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}]\}$

con $h(x) = f(x, \sqrt{2}) = 2e^x$



$$f(\pm \frac{8}{3}, \sqrt{2}) = 2e^{\pm 8/3}$$

2) $\Gamma_2 = \{(x, y) : g(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 72 = 0, y \geq \sqrt{2}\}$ *vincolo regolare*

Moltiplicatori di Lagrange:

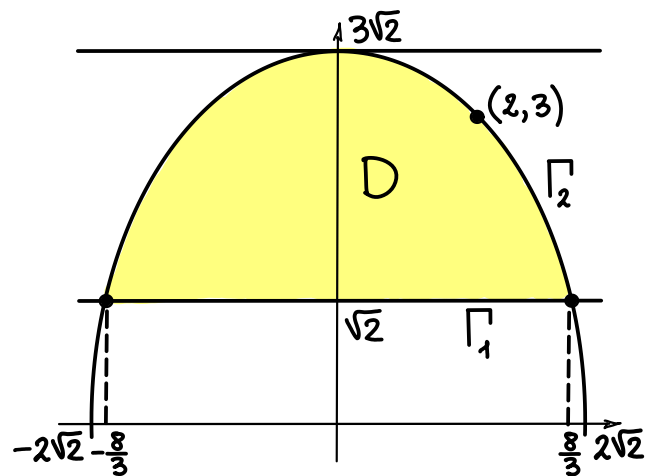
$$\begin{cases} y^2 e^x = \lambda 18x \\ 2ye^x = \lambda 8y \\ 9x^2 + 4y^2 = 72 \end{cases} \rightarrow \frac{y^2 e^x}{2ye^x} = \frac{\lambda 18x}{\lambda 8y} \rightarrow y^2 = \frac{9}{2}x$$

$$f(2, 3) = 9e^2$$

$$9x^2 + 4y^2 = 72 \rightarrow 9x^2 + 4 \cdot \frac{9}{2}x = 72 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 2, -4$$

$$y = 3, -3$$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in D è $9e^2$ e quello minimo è $2e^{-8/3}$.



(b) Si noti che $f(x,y) \geq 0$ e che f vale 0 lungo la retta $y=0$. Inoltre $f(2,1)=e^2$. Così affinché f assuma valore minimo 0 e valore massimo e^2 nel cerchio C basta che C intersechi la retta $y=0$ e sia tangente alla curva di livello e^2 in $(2,1)$ in modo che il gradiente

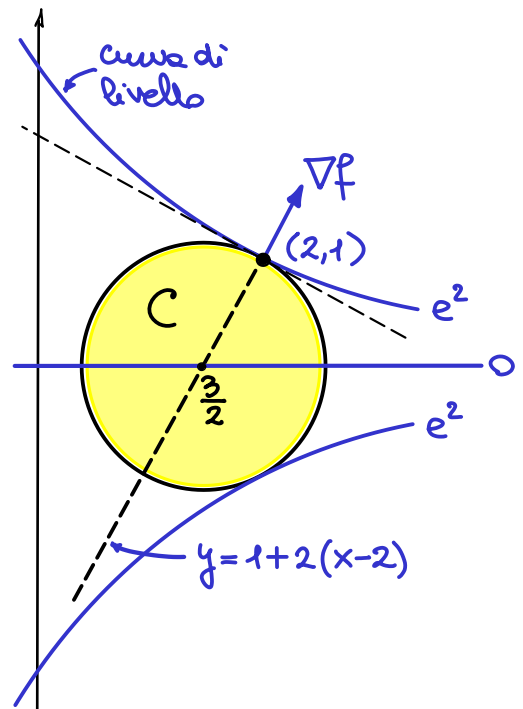
$$\nabla f(2,1) = e^2 \cdot (1, 2)$$

punti verso l'esterno.

Ad esempio il cerchio di centro $(\frac{3}{2}, 0)$ e raggio $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 \leq \frac{5}{4}$$

ha la proprietà richiesta.



Esercizio 2. Sia l'equazione $xe^y + y \log(x) = 1$.

(a) Verificare che in un intorno di $(1, 0)$ l'equazione definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(1) = 0$ e calcolare il suo polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 1$.

(b) Calcolare il limite di

$$f(x, y) = \frac{(y \sin(\pi x))^2}{(x-1)^3 + (e^y - 1)^3}$$

per $(x, y) \rightarrow (1, 0)$ lungo la curva data dai punti che soddisfano l'equazione.

(a) Sia $g(x, y) = xe^y + y \log(x) - 1$ allora

$$g_x(x, y) = e^y + \frac{y}{x}, \quad g_y(x, y) = xe^y + \log(x).$$

Dato che $g_y(1, 0) \neq 0$ allora per il teo. delle funzioni implicite $\exists y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(1) = 0$ e

$$\varphi'(1) = -\frac{g_x(1, 0)}{g_y(1, 0)} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Inoltre derivando due volte l'equazione

$$xe^{\varphi} + \varphi \log(x) = 1$$

rispetto a x si ha

$$e^{\varphi} + x e^{\varphi} \varphi' + \varphi' \log(x) + \varphi \frac{1}{x} = 0$$

e

$$2e^{\varphi} \varphi' + x e^{\varphi} (\varphi')^2 + x e^{\varphi} \varphi'' + \varphi'' \log(x) + 2\varphi' \frac{1}{x} - \varphi \frac{1}{x^2} = 0.$$

Infine ponendo $x=1$ si trova

$$-2 + 1 + \varphi'' + 0 - 2 - 0 = 0 \Rightarrow \varphi''(1) = 3$$

e quindi

$$T_2(x) = 0 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

(b) Per (a), la curva $xe^y + y \log(x) = 1$ è parametrizzata in un intorno di $(1, 0)$ come $x \rightarrow (x, \varphi(x))$.

Così per $x \rightarrow 1$, $t = x-1 \rightarrow 0$, $\varphi(x) = -t + \frac{3}{2}t^2 + o(t^2)$ e

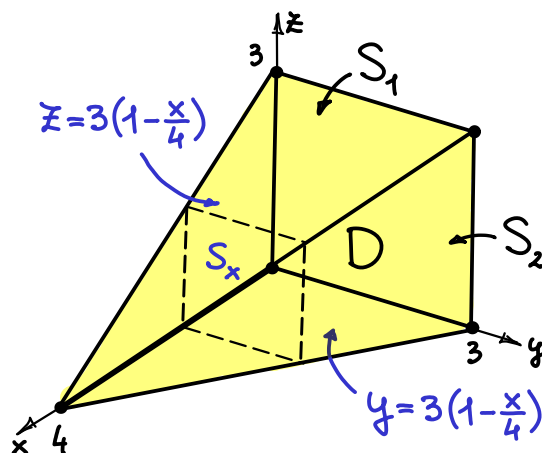
$$\begin{aligned} f(x, \varphi(x)) &= \frac{\varphi^2 \sin^2(\pi x)}{(x-1)^3 + (e^{\varphi} - 1)^3} = \frac{(t^2 + o(t^2)) \cdot (\pi^2 t^2 + o(t^2))}{t^3 + (-t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}(-t)^2 + o(t^2))^3} \\ &= \frac{\pi^2 t^4 + o(t^4)}{t^3 - t^3 + 3 \cdot 2 \cdot t^4 + o(t^4)} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia D il solido dato dal poliedro di vertici:

$$(0, 0, 0), (4, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3) \text{ e } (0, 3, 3).$$

(a) Calcolare $\frac{1}{|D|} \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$.

(b) Calcolare $\frac{1}{|\partial D|} \iint_{\partial D} xyz dS$.



(a) Il volume della piramide D è $|D| = \frac{3 \cdot 4}{3} = 12$. Si noti che D è simmetrico rispetto al piano $z = y$.

$$\begin{aligned} \iiint_D x^2 dx dy dz &= \int_{x=0}^4 x^2 |S_x| dx = \int_0^4 x^2 \cdot 3^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 dx = 4^3 \cdot 3^2 \int_0^1 \underbrace{t^2 (1-t)^2}_{t^2 - 2t^3 + t^4} dt \\ &= 4^3 \cdot 3^2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{2t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4^3 \cdot 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2^5 \cdot 3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D y^2 dx dy dz &= \int_{x=0}^4 \left(\iint_{S_x} y^2 dy dz \right) dx = \int_0^4 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{3(1-\frac{x}{4})} \cdot \left[z \right]_0^{3(1-\frac{x}{4})} dx \\ &= 3^3 \int_0^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right)^4 dx = \frac{3^3 \cdot 4}{5} \left[-\left(1 - \frac{x}{4}\right)^5 \right]_0^4 = \frac{2^2 \cdot 3^3}{5} \end{aligned}$$

e per simmetria $\iiint_D z^2 dx dy dz = \iiint_D y^2 dx dy dz$.
Coni

$$\frac{1}{|D|} \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{12} \left(\frac{2^5 \cdot 3}{5} + 2 \cdot \frac{2^2 \cdot 3^3}{5} \right) = \frac{26}{5}.$$

(b) Il bordo di D è costituito da 5 facce piane di area

$$|\partial D| = 3 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 5}{2} = 36 \quad \leftarrow \sqrt{3^2 + 4^2}$$

L'integrale di xyz vale 0 sulle facce contenute nei piani $x=0$, $y=0$ o $z=0$. Rimangono da calcolare gli integrali sulle facce S_1 e S_2 che per simmetria sono uguali.

Parametrizzazione di S_1 :

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 3(1 - \frac{x}{4})) \quad \text{con } A = \left\{ (x,y) : \begin{matrix} x \in [0,4] \\ 0 \leq y \leq 3(1 - \frac{x}{4}) \end{matrix} \right\}.$$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (\frac{3}{4}, 0, 1)$ e $\|\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y\| = \frac{5}{4}$.

Così

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} xyz \, dS &= \frac{3 \cdot 5}{4} \iint_A xy(1 - \frac{x}{4}) \, dx \, dy = \frac{3 \cdot 5}{4} \int_0^4 x(1 - \frac{x}{4}) \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{3(1 - \frac{x}{4})} dx \\ &\stackrel{\substack{t = 1 - \frac{x}{4} \\ \downarrow}}}{=} 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \int_0^1 \underbrace{(1-t)t^3}_{t^3 - t^4} dt = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Infine

$$\frac{1}{|\partial D|} \iint_{\partial D} xyz \, dS = \frac{1}{36} (3 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{27}{2}) = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 4. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = (2, 2x, z^2)$ e siano

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3, z^2 \geq x^2 + (y-1)^2, z \geq 0\}$$

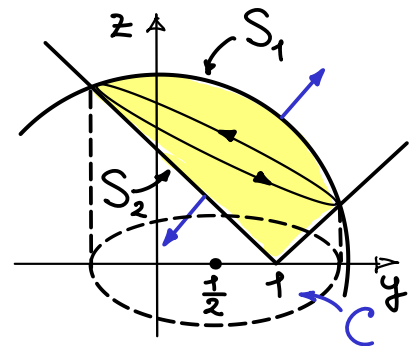
orientata in modo che $\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto, e

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, z^2 = x^2 + (y-1)^2, z \geq 0\}$$

è orientata in modo che $\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle \leq 0$ in ogni suo punto.

(a) Calcolare $\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$.

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove γ è la curva chiusa data da $S_1 \cap S_2$ orientata in senso antiorario rispetto all'asse z .



(a) $S_1 \cup S_2$ è il bordo del solido

$$D = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq z \leq \sqrt{3 - x^2 - y^2}\}$$

orientato verso l'esterno.

La proiezione C di D sul piano $z=0$ è

$$x^2 + y^2 + (x^2 + (y-1)^2) \leq 3, \quad x^2 + y^2 - 2y \leq 1, \quad x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Così per il teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iiint_D \underbrace{\text{div}(\vec{F})}_{2z} dx dy dz = \iint_C \left[z^2 \right]_{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}^{\sqrt{3 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 2 \iint_C \left(\frac{5}{4} - x^2 - (y - \frac{1}{2})^2 \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} + \rho \sin \theta \end{cases} \Rightarrow 2 \int_{\theta=0}^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \int_{\rho=0}^{2\pi} \left(\frac{5}{4} - \rho^2 \right) \rho d\rho d\theta = 4\pi \left[\frac{5}{4} \cdot \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{25\pi}{16}.$$

(b) $S_1 \cap S_2$ con l'orientazione data è il bordo di S_1 e per il teorema del rotore

$$\begin{aligned} \int_{S_1 \cap S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_{S_1} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_C \langle (0, 0, 2), (*, *, 1) \rangle dx dy \\ &= 2|C| = 2 \cdot \frac{5}{4} \pi = \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

dove è stata usata la parametrizzazione cartesiana di S_1 .