

Cognome:
Nome:
Orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)(x^2-y^2)(x+y+4)^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Verificare che f è continua in $(0, 0)$. f è differenziabile in $(0, 0)$?
 (b) Determinare un insieme aperto e non limitato $A \subset \mathbb{R}^2$ dove la funzione f è limitata.

Esercizio 2. Sia $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{14 + axy + axy^2}{1 + y}, \frac{(x + xy)^2 - 14x}{(1 + y)^2} \right)$.

- (a) Trovare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che \mathbf{F} è conservativo in $\mathbb{R} \times (-1, +\infty)$ e per tali valori determinare una funzione potenziale.
 (b) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = 0,$$

dove γ è la curva formata dal segmento da $(1, 0)$ a $(4, 1)$, dalla semicirconferenza da $(4, 1)$ a $(-2, 1)$ passante per $(1, 4)$ e infine dal segmento da $(-2, 1)$ a $(1, 1)$.

Esercizio 3. Sia $D = \{(x, y, z) : x^2 - z^2 \leq 1 - y^2, 0 \leq z \leq 2\}$.

- (a) Calcolare $\iiint_D \frac{x^2 e^z}{1 + z^2} dx dy dz$.
 (b) Calcolare $\iint_{\partial D} \frac{1}{\sqrt{1 + 2z^2}} dS$.

Esercizio 4. Sia $S = \{(x, y, z) : (z + 1)^2 = x^2 + y^2, z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 \leq 1\}$.

La superficie S è orientata in modo che $\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto.

- (a) Calcolare il flusso $\iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), d\mathbf{S} \rangle$ dove $\mathbf{F}(x, y, z) = (-2y, xz^2, 3x^2)$.
 (b) Verificare il calcolo fatto in (a) applicando il teorema del rotore.