

Analisi Matematica

Esercizi di riepilogo - Quarta parte

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabilità, i massimi e i minimi relativi, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Tracciare il grafico di $f(|x-1|)$.

a) Il dominio è $D = \mathbb{R}$.

$y = \pi/2$ è l'asintoto per $x \rightarrow +\infty$ mentre $y = -\pi/2$ è l'asintoto per $x \rightarrow -\infty$ perché

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \frac{\pi}{2} + 0 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Non ci sono asintoti verticali.

Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2 \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Quindi f è crescente in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ed è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e in $[\sqrt{3}, +\infty)$. Dunque $x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo e $x = -\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (3-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-7)}{(1+x^2)^3}.$$

Quindi f è convessa in $[-\sqrt{7}, 0]$ e in $[\sqrt{7}, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, -\sqrt{7}]$ e in $[0, \sqrt{7}]$. Così $x = 0$, $x = -\sqrt{7}$ e $x = \sqrt{7}$ sono punti di flesso.

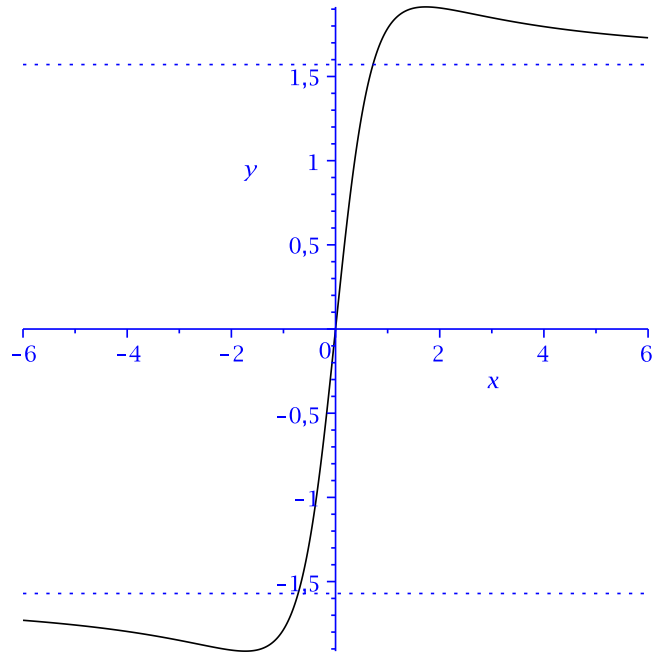


Grafico di $f(x) = \arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}$

b) Il grafico di $f(|x-1|)$ è simmetrico rispetto alla retta $x=1$. Inoltre $f(|x-1|) = f(x-1)$ per $x \geq 1$.

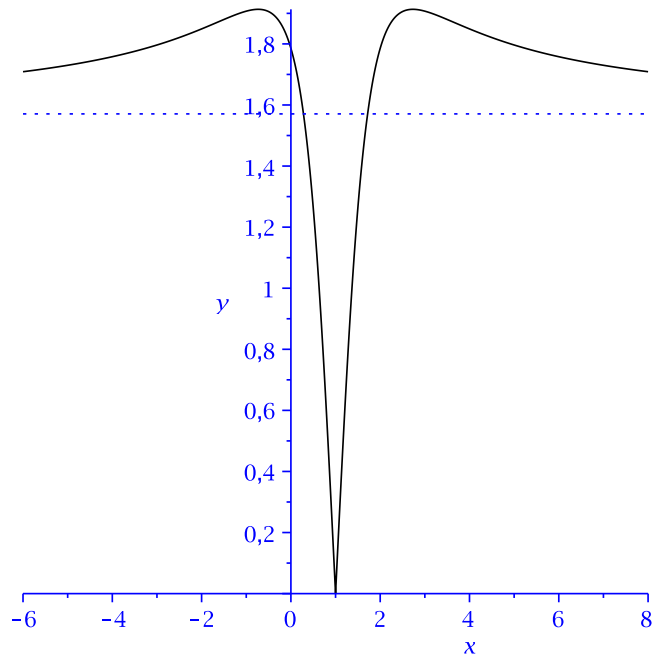


Grafico di $f(|x-1|)$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \frac{1}{1 + 2\log(x)} - \sqrt{1 + 4x(1 - x)}$.

a) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(\sin(\pi x))^2}$.

b) Determinare se il punto $x_0 = 1$ è per f un punto di minimo relativo, massimo relativo o nessuno dei due.

a) Per $t = x - 1 \rightarrow 0$, abbiamo che

$$(\sin(\pi x))^2 = (\sin(\pi t + \pi))^2 = (-\sin(\pi t))^2 = \pi^2 t^2 + o(t^2).$$

Allora anche per $f(x)$ calcoliamo gli sviluppi fino al secondo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + 2\log(x)} &= \frac{1}{1 + 2\log(1 + t)} = \frac{1}{1 + (2t - t^2 + o(t^2))} \\ &= 1 - (2t - t^2 + o(t^2)) + (2t - t^2 + o(t^2))^2 + o(t^2) \\ &= 1 - 2t + (1 + 2^2)t^2 + o(t^2) = 1 - 2t + 5t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 4x(1 - x)} &= \sqrt{1 - 4(t + t^2)} = 1 + \frac{(-4(t + t^2))}{2} - \frac{(-4(t + t^2))^2}{8} + o(t^2) \\ &= 1 - 2t + \left(-\frac{4}{2} - \frac{16}{8}\right)t^2 + o(t^2) = 1 - 2t - 4t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Così,

$$f(x) = 1 - 2t + 5t^2 + o(t^2) - (1 - 2t - 4t^2 + o(t^2)) = 9t^2 + o(t^2).$$

Infine

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(\sin(\pi x))^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9t^2 + o(t^2)}{\pi^2 t^2 + o(t^2)} = \frac{9}{\pi^2}.$$

b) Dallo sviluppo di Taylor di f ottenuto in a), si ha che

$$f'(1) = 0 \quad \text{e} \quad f''(1) = 2 \cdot 9 = 18 > 0$$

e quindi $x_0 = 1$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}$.

a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_0^\infty \frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2} dx$ è convergente.

b) Calcolare $\int_{1/6}^{+\infty} f(x) dx$.

a) Nell'intervallo $(0, +\infty)$, i punti da indagare sono due: 0^+ e $+\infty$.

Per $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2} \sim \frac{\sqrt{6}\sqrt{x}x^a}{x\sqrt{x}\log(3)^2} = \frac{c_1}{x^{1-a}}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $1-a < 1$ ossia $a > 0$.

Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo che

$$\frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2} \sim \frac{\pi/2 x^a}{x\sqrt{x}(\log(x^4))^2} = \frac{c_2}{x^{3/2-a}(\log(x))^2}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $3/2-a \geq 1$ ossia $a \leq 1/2$.

Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < a \leq 1/2$.

b) Posto $t = \sqrt{6x}$, si ha che $x = t^2/6$, $dx = tdt/3$ e

$$\begin{aligned} \int_{1/6}^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{(t^2/6)(t/\sqrt{6})} tdt/3 \\ &= 2\sqrt{6} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt = \sqrt{6} \left(\frac{\pi}{2} + \log(2) \right) \end{aligned}$$

perché, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt &= \int_1^{+\infty} \arctan(t) d(-1/t) \\ &= \left[-\frac{\arctan(t)}{t} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} dt \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{\pi}{4} + \left[\log(t) - \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\log \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. a) Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (1, +\infty)$,

$$\begin{cases} xy'(x) = \frac{2x^2 y(x)}{1-x^2} + 2 \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

b) Determinare l'asintoto della soluzione $y(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

Risistemando i termini abbiamo che

$$y'(x) + \frac{2x}{x^2-1} y(x) = \frac{2}{x}.$$

Quindi $a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$,

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \log(|x^2-1|)$$

e il fattore integrante è $\exp(A(x)) = |x^2-1| = x^2-1$ (si noti che $x > 1$). Inoltre,

$$\int \exp(A(x)) f(x) dx = \int \frac{2(x^2-1)}{x} dx = \int \left(2x - \frac{2}{x} \right) dx = x^2 - 2 \log(x) + c.$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = \exp(-A(x)) \int \exp(A(x)) f(x) dx = \frac{x^2 - 2 \log(x) + c}{x^2 - 1}.$$

Imponendo la condizione $y(2) = 3$ si trova

$$3 = y(2) = \frac{4 - 2 \log(2) + c}{3} \implies c = 5 + 2 \log(2)$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{x^2 - 2 \log(x) + 5 + 2 \log(2)}{x^2 - 1}.$$

b) Per $x \rightarrow +\infty$,

$$y(x) = \frac{1 + \frac{-2 \log(x) + 5 + 2 \log(2)}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1.$$

e dunque l'asintoto cercato è $y = 1$.