

# Analisi Matematica

## Esercizi di riepilogo - Terza parte

**Esercizio 1.** Sia

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 - |x + 2|}{x^2 + 2}\right).$$

- a) Determinare il dominio di  $f$ .
- b) Quali sono gli asintoti di  $f$ ?

a) Il denominatore  $x^2 + 2$  è sempre diverso da zero. Inoltre, dato che la funzione arcoseno è definita nell'intervallo  $[-1, 1]$ , dobbiamo imporre che valga la doppia disequazione

$$-1 \leq \frac{x^2 - |x + 2|}{x^2 + 2} \leq 1$$

ossia

$$-(x^2 + 2) \leq x^2 - |x + 2| \leq x^2 + 2$$

e quindi

$$-2 \leq |x + 2| \leq 2x^2 + 2.$$

La disuguaglianza a sinistra è sempre soddisfatta e dunque rimane da risolvere quella a destra. Spezziamo l'analisi a seconda del segno dell'argomento del modulo:

$$\begin{cases} x + 2 < 0 \\ -x - 2 \leq 2x^2 + 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + 2 \leq 2x^2 + 2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x < -2 \\ 2x^2 + x + 4 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -2 \\ (2x - 1)x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1/2 \end{cases}$$

Dunque il dominio è

$$D = (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty).$$

b) La funzione è continua in  $D$  e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi  $y = \pi/2$  è l'unico asintoto di  $f$ .

**Esercizio 2.** Calcolare il polinomio di Taylor di ordine  $n = 6$  in  $x_0 = 0$  della funzione

$$f(x) = (\cos(x))^x.$$

Per  $x \rightarrow 0$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x \log(\cos(x))) = \exp\left(x \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\right) \\ &= \exp\left(x\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^5}{8} + o(x^6)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^6)\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^6)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^6)\right)^2 + o(x^6) \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{8} + o(x^6). \end{aligned}$$

dove sono stati utilizzati gli sviluppi per  $t \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \cos(t) &= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^5), \\ \log(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \\ e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2). \end{aligned}$$

Quindi il polinomio di Taylor di ordine 6 in  $x_0 = 0$  di  $f$  è

$$T_6(x) = 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{8}.$$

**Esercizio 3.** Fare un esempio di due numeri interi positivi  $n$  e  $m$  tali che il sistema

$$\begin{cases} z^n = 1 \\ z^m = -1 \end{cases}$$

abbia esattamente 4 soluzioni e determinare tali soluzioni.

Sappiamo che se  $n$  e  $m$  sono numeri interi positivi allora l'equazione  $z^n = 1$  ha  $n$  soluzioni distinte e  $z^m = -1$  ha  $m$  soluzioni distinte in ogni caso posizionate lungo la circonferenza unitaria  $|z| = 1$ . Per avere esattamente 4 soluzioni in comune possiamo porre  $m = 4$  e fare in modo che le soluzioni di  $z^4 = -1$  siano anche soluzioni di  $z^n = 1$ .

Notiamo che se  $z^4 = -1$  allora

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Dunque ponendo  $n = 8$  abbiamo che il sistema ha esattamente 4 soluzioni.

Infatti, per  $n = 8$  e  $m = 4$  abbiamo che

$$\begin{cases} z^8 = 1 \\ z^4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z_k = e^{i(\pi+2\pi k)/4} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

ossia

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

**Esercizio 4.** Risolvere il problema di Cauchy per  $x \in (0, +\infty)$ ,

$$\begin{cases} y'(x) = 4x - \frac{2y(x)}{3\sqrt[3]{x}} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Risistemando i termini si ha

$$y'(x) + \frac{2y(x)}{3\sqrt[3]{x}} = 4x.$$

Una primitiva di  $a(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$  per  $x > 0$  è

$$A(x) = \int \frac{2}{3}x^{-1/3} dx = x^{2/3}.$$

Così il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{x^{2/3}}.$$

Quindi, ponendo  $s = x^{2/3}$ , integriamo

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} f(x) dx &= \int e^{x^{2/3}} 4x dx = 4 \int e^s 4s^{3/2} \frac{3s^{1/2}}{2} ds \\ &= 6 \int s^2 e^s ds = 6(s^2 - 2s + 2)e^s + c \\ &= 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2)e^{x^{2/3}} + c. \end{aligned}$$

Allora la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) dx = 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2) + ce^{-x^{2/3}}.$$

Imponendo la condizione  $y(1) = 5$  abbiamo che

$$5 = y(1) = 6 + ce^{-1} \implies c = -e$$

e la soluzione cercata in  $(0, +\infty)$  è

$$y(x) = 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2) - e^{1-x^{2/3}}.$$

**Esercizio 5.** Trovare tutti i punti critici della funzione  $f(x, y) = 2x \log(2 - y^2) + x^2$  e studiarne la natura.

Abbiamo che per  $2 - y^2 > 0$ ,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2x \log(2 - y^2) + x^2) = 2 \log(2 - y^2) + 2x,$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (2x \log(2 - y^2) + x^2) = \frac{2x(-2y)}{2 - y^2} = \frac{4xy}{y^2 - 2}.$$

I punti critici si ottengono risolvendo  $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (0, 0)$  ossia

$$\begin{cases} 2 \log(2 - y^2) + 2x = 0 \\ \frac{4xy}{y^2 - 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \log(2 - y^2) + 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2 \log(2 - y^2) + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2 - y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2 \log(2) + 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\log(2) \\ y = 0 \end{cases}$$

e quindi i punti critici sono:  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$  e  $(-\log(2), 0)$ .

Inoltre le derivate seconde di  $f$  sono:

$$f_{xx}(x, y) = 2,$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{4y}{y^2 - 2},$$

$$f_{yy}(x, y) = 4x \frac{y^2 - 2 - 2y^2}{(y^2 - 2)^2} = -\frac{4x(y^2 + 2)}{(y^2 - 2)^2}.$$

Calcoliamo la matrice hessiana  $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$  nei punti critici:

$$H_f(0, \pm 1) = \begin{bmatrix} 2 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_f(-\log(2), 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \log(2) \end{bmatrix}.$$

Dato che  $\det(H_f(0, \pm 1)) = -16 < 0$  allora  $(0, \pm 1)$  sono punti di sella.

Dato che  $\det(H_f(-\log(2), 0)) = 4 \log(2) > 0$  e  $f_{xx}(-\log(2), 0) = 2 > 0$  allora  $(-\log(2), 0)$  è un punto di minimo relativo.