

Analisi Matematica

Esercizi di riepilogo - Seconda parte

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|).$$

- a) Trovare tutti gli asintoti di f .
- b) Determinare $f((0, +\infty))$.
- c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in (0, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x^2 + x} = (x^2 + x)e^x \\ y(1) = 2e \end{cases}$$

Esercizio 3. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^4 \frac{(5 + 3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x - x^2)^\alpha} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$,

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

Esercizio 5. Determinare se la seguente serie è convergente

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{k^2 + 3k}{k^2 + 1}\right) - \exp\left(\frac{k}{k-2}\right) \right).$$