Analisi Matematica
Esercizi di riepilogo - Prima parte

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x}) \log \left| \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right|}{\left((x-2)^2 + \log(\frac{x}{2}) \right) \log |x-2|}$$

calcolare $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Per $x \to 0^+$ si ha che

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{2} \log \left(\frac{\pi x}{2} \right)}{\log \left(\frac{x}{2} \right) \log(2)} = \frac{\sqrt{2} \left(\log(x) + \log \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)}{(\log(x) - \log(2)) \log(2)} \to \frac{\sqrt{2}}{\log(2)}.$$

Così

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\log(2)}.$$

Per $x \to 2$, posto $t = x - 2 \to 0$, si ha

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{t+2}) \log \left| \sin \left(\frac{\pi(t+2)}{2} \right) \right|}{\left(t^2 + \log(\frac{t+2}{2}) \right) \log |t|} = \sqrt{2} \, \frac{(1 - \sqrt{1 + \frac{t}{2}}) \log \left| \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) \right|}{\left(t^2 + \log(1 + \frac{t}{2}) \right) \log |t|}.$$

Dato che per $t \to 0$,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 + \frac{t}{2}} &= 1 - \left(1 + \frac{t}{4} + o(t) \right) \sim -\frac{t}{4}, \\ t^2 + \log \left(1 + \frac{t}{2} \right) &= t^2 + \frac{t}{2} + o(t) \sim \frac{t}{2} \end{aligned}$$

e

$$\frac{\log \left| \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) \right|}{\log |t|} = \frac{\log \left(\frac{\pi |t|}{2} + o(t) \right)}{\log |t|} \sim \frac{\log |t| + \log \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\log |t|} \to 1,$$

abbiamo che

$$f(x) \sim \sqrt{2} \cdot \frac{-t/4}{t/2} \cdot 1 \to -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e dunque

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - |\log(x)|}$$

specificando: dominio, segno, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Per il dominio dobbiamo imporre che $x > 0$ e $\log(x) \neq \pm 1$ da cui

$$D = (0, 1/e) \cup (1/e, e) \cup (e, +\infty).$$

La funzione non si annulla mai in D, è positiva in $(1/e, e)$ e ed è negativa altrove.
I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to(1/e)^\pm} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to e^\pm} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

Quindi $y = 0$ è l'asintoto per $x \to +\infty$, mentre $x = 1/e$ e $x = e$ sono asintoti verticali.
Derivata prima. Per $x \in D \cap (0, 1)$,

$$f'(x) = D\left(\frac{1}{1 + \log(x)}\right) = -\frac{1}{x(1 + \log(x))^2}$$

e per $x \in D \cap (1, +\infty)$,

$$f'(x) = D\left(\frac{1}{1 - \log(x)}\right) = \frac{1}{x(1 - \log(x))^2}$$

da cui si deduce che f è decrescente in $(0, 1/e)$ e in $(1/e, 1)$, mentre f è crescente in $(1, e)$ e in $(e, +\infty)$. Così $x = 1$ è un punto di minimo relativo con $f(1) = 1$ (non ci sono punti di minimo/massimo assoluto). Inoltre $x = 1$ è anche un punto angoloso:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x(1 - \log(x))^2} = 1 \quad \text{e} \quad f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{-1}{x(1 + \log(x))^2} = -1.$$

Si noti che $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$.
Derivata seconda. Per $x \in D \cap (0, 1)$,

$$f''(x) = D\left(-\frac{1}{x(1 + \log(x))^2}\right) = \frac{(1 + \log(x))^2 + 2x(1 + \log(x))/x}{x^2(1 + \log(x))^4} = \frac{3 + \log(x)}{x^2(1 + \log(x))^3}$$

e per $x \in D \cap (1, +\infty)$,

$$f''(x) = D\left(\frac{1}{x(1 - \log(x))^2}\right) = -\frac{(1 - \log(x))^2 - 2x(1 - \log(x))/x}{x^2(1 - \log(x))^4} = \frac{1 + \log(x)}{x^2(1 - \log(x))^3}$$

da cui si deduce che f è convessa in $(0, 1/e^3]$, $(1/e, 1)$ e in $(1, e)$, mentre f è concava in $[1/e^3, 1/e)$ e in $(e, +\infty)$. Così $x = 1/e^3$ è un punto di flesso.

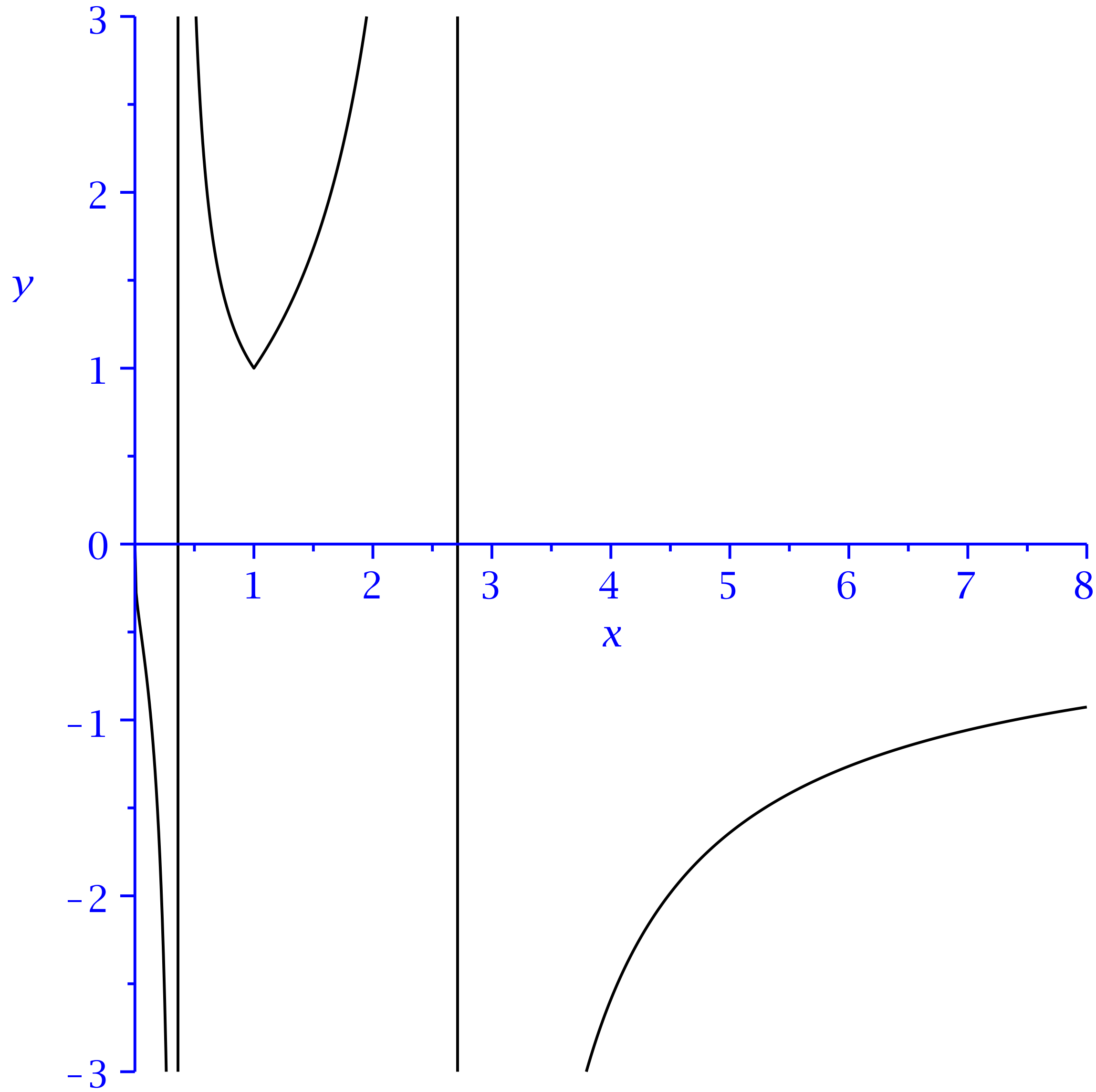

Grafico di $f(x) = \dfrac{1}{1 - |\log(x)|}$.

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^2 \arctan\left(\frac{x}{2-x}\right)\, dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int_0^2 \arctan\left(\frac{x}{2-x}\right)\, dx &= \left[x\arctan\left(\frac{x}{2-x}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 x\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2-x}\right)^2}\,\frac{(2-x)+x}{(2-x)^2}\, dx \\ &= \pi - \int_0^2 \frac{x}{x^2-2x+2}\, dx.\end{aligned}$$

Calcoliamo integrale rimanente tendendo presente che il polinomio x^2-2x+2 è irriducible con $\Delta < 0$: con la sostituzione $t = x-1$, si ha che

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x}{x^2-2x+2}\, dx &= \int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+1}\, dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{t}{t^2+1}\, dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt \\ &= 0 + 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt \\ &= 2\left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^2 \arctan\left(\frac{x}{2-x}\right)\, dx = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 4. Determinare se la seguente serie è convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos^2(\frac{1}{k}) - \sin^2(\frac{2}{k})}{\cos(\frac{3}{k})} \right)^{k^3}.$$

Per $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^2(\frac{1}{k}) - \sin^2(\frac{2}{k})}{\cos(\frac{3}{k})} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{2k^2} + o(1/k^2)\right)^2 - \left(\frac{2}{k} + o(1/k^2)\right)^2}{1 - \frac{9}{2k^2} + o(1/k^2)} \\
&= \left(\left(1 - \frac{2}{2k^2} + o(1/k^2)\right) - \left(\frac{4}{k^2} + o(1/k^2)\right) \right) \left(1 + \frac{9}{2k^2} + o(1/k^2)\right) \\
&= \left(1 - \frac{5}{k^2} + o(1/k^2)\right) \left(1 + \frac{9}{2k^2} + o(1/k^2)\right) \\
&= 1 + \frac{-5 + 9/2}{k^2} + o(1/k^2) = 1 + \frac{-1/2}{k^2} + o(1/k^2)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{\cos^2(\frac{1}{k}) - \sin^2(\frac{2}{k})}{\cos(\frac{3}{k})} \right)^{k^3/k} = \left(1 + \frac{-1/2}{k^2} + o(1/k^2)\right)^{k^2} \to e^{-1/2}.$$

Allora, per il criterio della radice, dato che $e^{-1/2} < 1$ la serie data è convergente.

Esercizio 5. Risolvere
$$|z| + iz\mathrm{Re}(z) = z^2.$$

Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali e sostituendo nell'equazione si ha che

$$\sqrt{x^2 + y^2} + i(x + iy)x = (x + iy)^2$$

ossia
$$\sqrt{x^2 + y^2} + ix^2 - xy = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - xy = x^2 - y^2 \\ x^2 = 2xy \end{cases}$$

Dalla seconda equazione $x(x - 2y) = 0$ otteniamo che $x = 0$ oppure $x = 2y$, da cui

$$\begin{cases} |y| = -y^2 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \sqrt{5}|y| - 2y^2 = 4y^2 - y^2 \\ x = 2y \end{cases}$$

ossia
$$\begin{cases} |y|(1 + |y|) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} |y|(1 - \sqrt{5}|y|) = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

e risolvendo si ottiene
$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y \in \{0, 1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}\} \\ x = 2y \end{cases} .$$

Così le soluzioni dell'equazione data sono tre:

$$0, \quad \frac{2+i}{\sqrt{5}}, \quad -\frac{2+i}{\sqrt{5}}.$$