

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 34

INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE IN DUE O PIU' VARIABILI

Una FUNZIONE DI m VARIABILI reali a valori reali

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

è una corrispondenza che assegna ad ogni punto $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in D$ (dominio di f) il valore $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$.

Per semplicità qui considereremo solo il caso $m=2$ dove $x_1=x$, $x_2=y$.

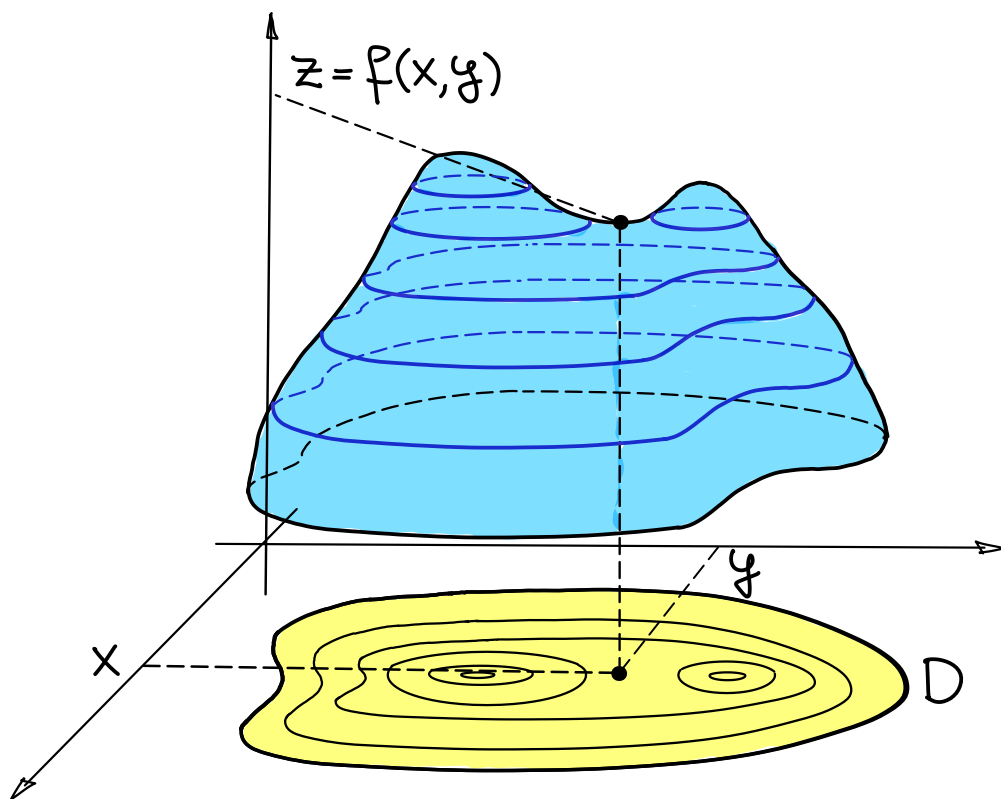
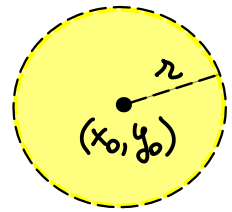


grafico di $f = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$.

Introducendo la definizione di INTORNO di un punto (x_0, y_0) di raggio $r > 0$

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$$



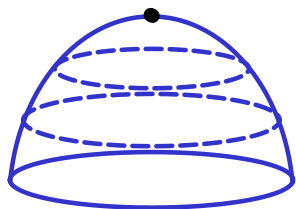
si estendono le nozioni di limite e continuità. Inoltre abbiamo le seguenti definizioni.

$(x_0, y_0) \in D$ è un punto di MASSIMO RELATIVO di f se

$$\exists r > 0 : \forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0) \cap D \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

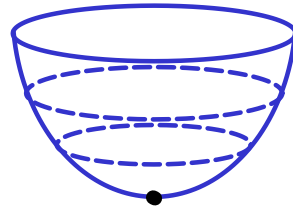
$(x_0, y_0) \in D$ è un punto di MINIMO RELATIVO di f se

$$\exists r > 0 : \forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0) \cap D \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$



$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

$(0, 0)$ PUNTO DI MAX. REL.



$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$(0, 0)$ PUNTO DI MIN. REL.

DERIVATA PARZIALE di $f(x, y)$ RISPETTO A x in (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

notazioni alternative

DERIVATA PARZIALE di $f(x, y)$ RISPETTO A y in (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

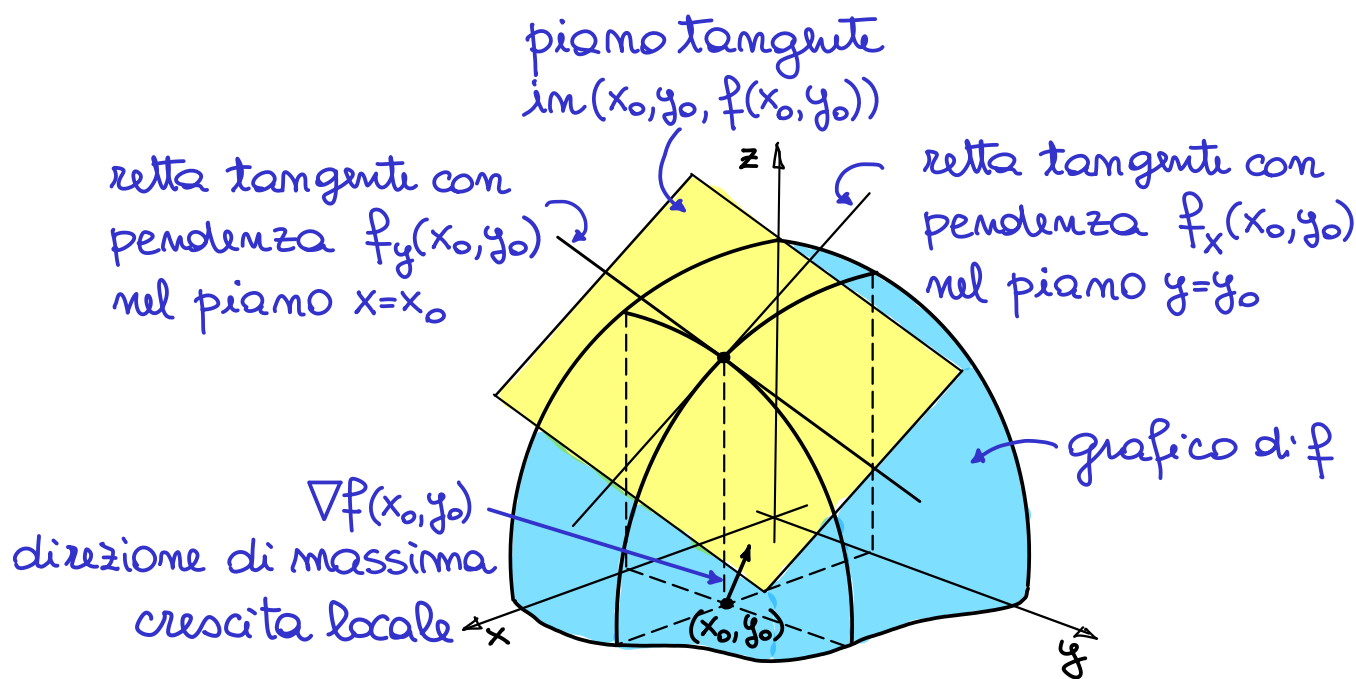
La coppia di derivate parziali definisce il vettore GRADIENTE di $f(x,y)$ in (x_0, y_0)

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

Se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ allora (x_0, y_0) si dice PUNTO CRITICO.

L'equazione del PIANO TANGENTE al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$



OSSERVAZIONE

Le definizioni date implicano che

- 1) per il calcolo di f_x si deriva f rispetto a x nel modo usuale trattando y come una costante;
- 2) per il calcolo di f_y si deriva f rispetto a y nel modo usuale trattando x come una costante.

ESEMPIO

• $f(x,y) = \frac{y \log(x)}{x^2 + y^2}$ f è definita in $D = \{(x,y) : x > 0\}$

Le derivate parziali sono:

$$f_x(x,y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot (x^2 + y^2) - \log(x) \cdot 2x \right)$$

$$f_y(x,y) = \frac{\log(x)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y)$$

Il gradiente di f in $(1,1)$ è

$$\nabla f(1,1) = (f_x(1,1), f_y(1,1)) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$(1,0)$ è un punto critico di f perché

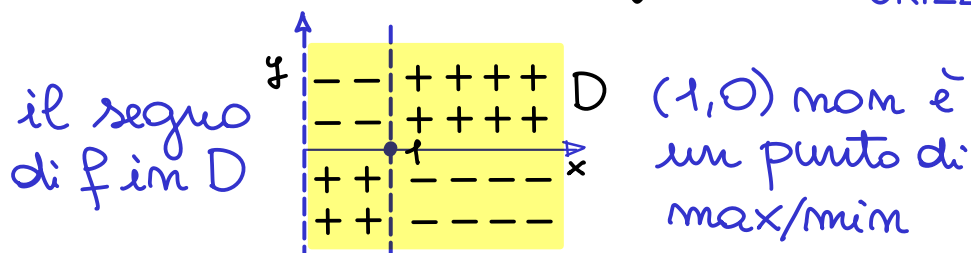
$$\nabla f(1,0) = (f_x(1,0), f_y(1,0)) = (0,0).$$

Le equazioni dei piani tangenti al grafico di f nei punti $(1,1, f(1,1))$ e $(1,0, f(1,0))$ sono

$$(1,1,0) \Rightarrow z = 0 + \frac{1}{2}(x-1) + 0 \cdot (y-1) = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$(1,0,0) \Rightarrow z = 0 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-0) = 0$$

PIANO ORIZZONTALE



$f, \nabla f$ continui

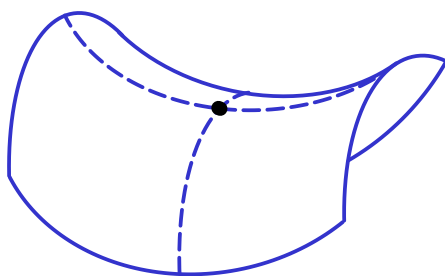
OSSERVAZIONE Se f è C^1 in un intorno di (x_0, y_0) e (x_0, y_0) è un punto di max/min relativo di f allora (x_0, y_0) è un punto critico.

Tuttavia non tutti i punti critici sono max/min relativi. Ci sono anche i punti di sella.

$(x_0, y_0) \in D$ è un punto di SELLA di f se (x_0, y_0) è un punto critico e

$$\forall r > 0: \exists (x_1, y_1) \in B_r(x_0, y_0) \cap D: f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0)$$

$$\exists (x_2, y_2) \in B_r(x_0, y_0) \cap D: f(x_2, y_2) < f(x_0, y_0)$$



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$(0, 0)$ PUNTO DI SELLA

Per studiare la natura di un punto critico è utile introdurre le DERIVATE PARZIALI SECONDE:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_x)(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial}{\partial y}(f_x)(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_y)(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial}{\partial y}(f_y)(x_0, y_0) = f_{yy}(x_0, y_0)$$

Le quattro derivate seconde sono gli elementi della MATRICE HESSIANA:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE

$$\det(H_f) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx}$$

Nel caso in cui le derivate seconde siano continue si dimostra che $f_{xy} = f_{yx}$.

In analogia a quanto visto in una variabile si introduce il POLINOMIO DI TAYLOR del secondo ordine di f in (x_0, y_0) :

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right)$$

Se f è C^2 in un intorno di (x_0, y_0) allora

$$f(x, y) = T_2(x, y) + O((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \text{ per } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Tale relazione permette lo studio di f "vicino" a (x_0, y_0) . In particolare si dimostra il seguente criterio.

TEOREMA (CRITERIO DELLE DERIVATE SECONDE)

Sia (x_0, y_0) un punto critico di f .

- 1) Se $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ allora (x_0, y_0) è un massimo relativo.
- 2) Se $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ allora (x_0, y_0) è un minimo relativo.
- 3) Se $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di sella.

OSSERVAZIONE Nel caso in cui $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$ il criterio è inconcludente.

ESEMPIO

- Determinare tutti i punti critici di

$$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 12xy \quad D = \mathbb{R}^2$$

e studiare la natura.

Le derivate parziali prime di f sono

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 12y, \quad f_y(x,y) = 24y^2 - 12x$$

e quindi i punti critici di f si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ 24y^2 - 12x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4y \\ 2y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2y^2)^2 = 4y \\ 2y^2 = x \end{cases} \rightarrow y(y^3 - 1) = 0$$

$$\begin{array}{cc} y=0 & y=1 \\ \downarrow & \downarrow \\ x=0 & x=2 \end{array}$$

Così i punti critici sono:

$$(0,0) \text{ e } (2,1).$$

Le derivate parziali seconde di f sono

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -12, \quad f_{yy}(x,y) = 48y.$$

e quindi la matrice hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{bmatrix}$$

In fine

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(H_f) = -12^2 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ PUNTO DI SELLA}$$

$$H_f(2,1) = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{bmatrix} \quad \det(H_f) = 12 \cdot 48 - 12^2 > 0 \Rightarrow (2,1) \text{ PUNTO DI MIN. REL.}$$
$$f_{xx} = 12 > 0$$